



TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

THM

**CAMPUS
FRIEDBERG**

IEM

Informationstechnik-
Elektrotechnik-Mechatronik

Vorlesungsskript und Übungsaufgaben zu

Grundlagen Wechsel-/Drehstrom

{ **Vorlesung ET4 (2009)** }

Michael Peppel

Wolf-Rainer Novender*

Bensheim, im Frühjahr 2019

Aus dem Inhalt:

Leistung

Drehstrom

Symmetrische Komponenten

Raumzeiger

Transformator

Inhaltsverzeichnis

1	Numerische Hilfsmittel	1
1.1	Vorbemerkung	1
1.2	Zu diesem Skript	1
1.3	GNUPLOT	2
1.4	NGSPICE	3
2	Leistung bei Wechselstrom	5
2.1	Augenblicks- und Mittelwert	5
2.1.1	Wechselstromleistung im ohmschen Zweipol	5
2.1.2	Wechselstromleistung des induktiven Zweipols	6
2.1.3	Wechselstromleistung des kapazitiven Zweipols	6
2.1.4	Wirkleistung des allgemeinen Zweipols	7
2.2	Wirkstrom und Blindstrom	8
2.3	Blindleistung	9
2.4	Scheinleistung	9
2.5	Zusammenhang zwischen den Leistungsgrößen	10
2.6	Komplexe Leistung	11
2.7	Leistungsanpassung	11
2.8	Wirkungsgrad	12
2.9	Blindleistungskompensation	12
3	Drehstromsystem	14
3.1	Bedeutung	14
3.2	Zeitverläufe	14
3.3	Komplexe Darstellung	15
3.4	Drehsinn	15
3.5	Vorteile gegenüber dem einfachen Wechselstrom	15
3.6	Mathematische Formulierung	16
3.7	Der komplexe Faktor \underline{a}	16
3.8	Symmetrieeigenschaften	17
3.9	Offenes Dreiphasensystem	17
3.10	Sternschaltung mit Neutraleiter	18
3.11	Sternschaltung ohne Neutraleiter	19
3.12	Dreieckschaltung	20
3.13	Typenschild, weitere Schaltungsarten	20
3.14	Anwendungen	20
3.15	Symmetrische Belastung	21
3.15.1	Ströme bei symmetrischer Belastung	21
3.15.2	Symmetrische Last in Sternschaltung	22
3.15.3	Symmetrische Last in Dreieckschaltung	22
3.15.4	Leistung bei symmetrischer Belastung	23
3.15.5	Einphasiges Ersatzschaltbild	23
3.15.6	Leitungsaufwand	24
3.16	Unsymmetrische Belastung im Vierleitersystem	24
3.16.1	Sternschaltung ohne Neutraleiter	25
3.16.2	Dreieckschaltung	27
3.16.3	Leistung	28

3.17	Leistungsmessungen in Drehstromsystemen	28
3.17.1	Wirkleistung	28
3.17.2	Aron-Schaltung	29
3.17.3	Blindleistung	31
3.18	Bewertung	32
3.19	Andere Mehrphasensysteme	32
3.20	Historisches: Wieso 220 V bzw. 230 V?	33
4	Symmetrische Komponenten	34
4.1	Problem	34
4.2	Alternative	34
4.3	Mitsystem	34
4.4	Gegensystem	34
4.5	Nullsystem	35
4.6	Zerlegung eines unsymmetrischen Systems in symmetrische Komponenten	36
4.7	Berechnung der Nullkomponente	37
4.8	Berechnung der Mitkomponente	37
4.9	Berechnung der Gegenkomponente	37
4.10	Berechnung der Phasengrößen aus den symmetrischen Komponenten	38
5	Raumzeiger	39
5.1	Idee	39
5.2	Erzeugung eines Raumzeigers	39
5.3	Mathematische Formulierung	40
5.4	Graphische Veranschaulichung	40
5.5	Raumzeiger und Nullsysteme	40
5.6	Raumzeiger und Leistung	41
5.7	Raumzeiger der Flussdichteverteilung	41
6	Transformator	44
6.1	Prinzipieller Aufbau und Zweck	44
6.2	Idealer Transformator	44
6.3	Magnetisierungsstrom	46
6.4	Wicklungssinn	47
6.5	Übersetzung von Impedanzen	48
6.6	Leistungsbilanz	48
6.6.1	Idealer Transformator	48
6.6.2	Verluste im realen Transformator	49
6.7	Hystereseverluste	49
6.8	Wirbelstromverluste	50
6.9	Streuung	51
6.10	T-Ersatzschaltbild	51
6.11	Ersatzschaltung mit Gegeninduktivität	53
6.12	Vergleich Gegeninduktivitäten und T-Ersatzschaltbild	54
6.13	Differentialgleichungssystem	55
6.14	Kopplungs- und Streufaktoren	56
6.15	Weitere Themen	57
6.15.1	Numerische Simulation der Transformator-Ersatzschaltungen	57
6.15.2	Einschaltstrom – <i>Rush-Effekt</i>	57

6.15.3	Analyse des Magnetisierungsstromes	57
7	Drehstromtransformator	58
7.1	Aufbau	58
7.2	Stern-Stern Schaltung (Yy)	59
7.3	Dreieck-Stern Schaltung (Dy)	60
7.4	Einphasige Ersatzschaltung	62
7.5	Mehrwinkeltransformatoren (Mehrwickler)	62
7.5.1	Maschinen-, Netzkupplungstransformator	63
7.5.2	Sechshephasenschaltung	63
7.5.3	Stern- und Dreieck-Schaltung	63
7.5.4	Zick-Zack-Schaltung	64
7.5.5	Ausgleichswicklung	65
7.6	Schaltgruppe	66
8	Übungsaufgaben	68
8.1	Grundsätzliches	68
8.2	Lösung mit GNUPLOT	68
8.3	Aufgaben zum Üben mit GNUPLOT	68
8.3.1	Beispiel 1.01	68
8.3.2	Beispiel 1.04	69
8.3.3	Beispiel 1.05	69
8.3.4	Beispiel 1.07	70
8.3.5	Beispiel 1.11	70
8.4	Wechselstromleistung	71
8.5	Blindleistungskompensation	73
8.5.1	Parallelkompensation	73
8.5.2	Serienkompensation	76
8.6	Drehstrom, Stern-, Dreieckschaltung, Phasenunterbrechung	77
8.7	Drehstrom, symmetrische Belastung, Zuleitungsverluste	82
8.8	Drehstrom, Leistung bei unsymmetrischer Belastung	85
8.9	Unsymmetrische Belastung eines Drehstromnetzes	92
8.10	Unsymmetrisches Vierleitersystem	95
8.11	Unsymmetrisches Dreileitersystem	97
8.12	Unsymmetrisches Vierleitersystem mit Widerstand im Neutralleiter	100
8.13	Umwandlung Einphasen- nach Dreiphasensystem	103
8.14	Grundlagen Symmetrische Komponenten	104
8.15	Symmetrische Komponenten	106
8.16	Symmetrische Komponenten	110
8.17	Symmetrische Komponenten	111
8.18	Drehfeld und Raumzeiger	114
8.19	Magnetisch gekoppelte Spulen, eisenlos	117
8.20	Einphasentransformator	120
8.21	Einphasentransformator im Prüffeld	121
8.22	Dreiphasentransformator im Prüffeld	124
8.23	Unsymmetrisch belasteter Drehstromtransformator	125
9	Weitere Beispiele	129
9.1	Drehfeldrichtungsanzeiger	129

Abbildungsverzeichnis

1	Spannung, Strom, Energie und Leistung an einem Widerstand	6
2	Spannung, Strom, Energie und Leistung an einer Induktivität	6
3	Spannung, Strom, Energie und Leistung an einer Kapazität	7
4	Spannung, Strom und Leistung an einer Impedanz	7
5	Leistungsanpassung	11
6	Blindleistungskompensation	13
7	Zeitverlauf bei positiver Phasenfolge	14
8	Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene	15
9	Positiver und negativer Drehsinn	15
10	Dreiphasensystem mit beliebiger Phasenlage	16
11	Summe der komplexen Effektivwerte im Zeigerdiagramm	17
12	Summe der komplexen Effektivwerte im Zeitdiagramm	18
13	Offene Schaltung	18
14	Sternschaltung mit Neutralleiter	19
15	Sternschaltung ohne Neutralleiter	19
16	Dreieckschaltung	20
17	Anwendungen von Drei- und Vierleitersystemen	20
18	Zeigerdiagramm bei symmetrischer Belastung	21
19	Symmetrische Last in Sternschaltung	22
20	Symmetrische Last in Dreieckschaltung	22
21	Einphasiges Ersatzschaltbild (ESB)	24
22	Leitungsaufwand für einphasiges und dreiphasiges Netz	24
23	Vierleiternetz mit unsymmetrischer Belastung	25
24	Zeigerdiagramm für verschiedene unsymmetrische Belastungen	25
25	Unsymmetrische Belastungen ohne Neutralleiter	26
26	Sternpunktverschiebung durch unsymmetrische Belastung	26
27	Unsymmetrische Belastung in der Dreieckschaltung	27
28	Leistung bei unsymmetrischer Belastung	28
29	Leistungsmessung	29
30	Aron-Schaltung mit Zeigerdiagramm	30
31	Messen der Blindleistung in einem Drehstromsystem	31
32	Aronschaltung zur Blindleistungsmessung	31
33	Zweiphasensystem, dargestellt im Zeit- und Zeigerdiagramm	32
34	Zeitverlauf und Raumzeiger beim Mitsystem	35
35	Zeitverlauf und Raumzeiger beim Gegensystem	35
36	Zeitverlauf und Raumzeiger beim Nullsystem (Phasenlage 0°)	36
37	Zerlegung in symmetrische Komponenten	36
38	Konstruktion des Raumzeigers aus den Phasengrößen	39
39	Raumzeiger des Nullsystems	41
40	Feldverteilung in einer sehr einfachen Drehstrommaschine	42
41	Flussdichteverteilung im Luftspalt, Grundschwingung aus harmonischer Analyse	43
42	Aufbau eines Manteltransformators	44
43	Grundgleichungen des idealen Transformators	45
44	Belasteter Einphasentransformator	46

45	Wicklungssinn	47
46	Übersetzungsverhältnis von Widerständen	48
47	Hysteresekennlinie	49
48	Entstehung von Wirbelströmen	50
49	Streu- und Hauptfeld, Ersatzschaltbild	51
50	T-Ersatzschaltbild eines realen Transformators	52
51	Ersatzschaltbild mit Gegeninduktivitäten	53
52	Vergleich T-Ersatzschaltbild und Gegeninduktivitäten	54
53	Ersatzschaltung für Dgl-System	55
54	Vom einphasigen zum dreiphasigen Transformator, 1. Teil	58
55	Vom einphasigen zum dreiphasigen Transformator, 2. Teil	59
56	Dreiphasiger Kern- und Manteltransformator	59
57	Stern-Stern-Schaltung (YNyn)	60
58	Stern-Stern-Schaltung (Yyn)	60
59	Dreieck-Stern-Schaltung (Dyn)	60
60	Unterschiedliche Ausführung der Dreieckswicklung	61
61	Dreieck-Sternschaltung und das Nullsystem	61
62	Zuordnung von dreiphasigen und einphasigen Größen	62
63	Anordnung und Bezeichnung der Wicklungen eines Mehrwicklers	62
64	Erzeugung eines Sechsphasensystems	63
65	Stern- und Dreieck-Schaltung eines Mehrwicklers	64
66	Zickzack-Schaltung	64
67	Flussbilanz der Zick-Zack-Schaltung bei einsträngiger Belastung	64
68	Yy-Schaltung mit Ausgleichwicklung bei einsträngiger Belastung	65
69	Schaltgruppe Dzn6	66
70	Schaltgruppen Dreieck (D) und Stern (Y) nach DIN 57 532 T4	66
71	Schaltgruppen Dz6 und Yz11 nach DIN 57 532 T4	67
72	Zeigerdiagramm der Spannungen	78
73	Zeigerdiagramm der Spannungen	79
74	Zeigerdiagramm der Spannungen	80
75	Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom der Phase U	83
76	Zeitlicher Verlauf der Einzelleistungen und der Gesamtleistung	84
77	Unsymmetrisches Drehstromnetz	85
78	Zeigerdiagramm der vier Leiterströme	86
79	Schwingende Leistungen	87
80	Zeigerdiagramm der Spannungen	88
81	Zeigerdiagramm der Leiterströme	90
82	Drehstromnetz mit einphasigen Verbrauchern	92
83	Zeigerdiagramm bei unsymmetrischer Belastung	94
84	Unsymmetrisches Vierleitersystem	95
85	Zeigerdiagramm zu Aufgabe 8.10	96
86	Unsymmetrisches Dreileitersystem	98
87	Zeigerdiagramm zum unsymmetrischen Dreileitersystem	99
88	Unsymmetrisches Vierleitersystem	100
89	Zeigerdiagramm zum unsymmetrischen Vierleitersystem	101
90	Umwandlung einphasig nach dreiphasig	103
91	Nullsystem	104
92	Null-, Mitsystem	105
93	Null-, Mit-, Gegensystem	106

94	Symmetrische Komponenten	106
95	Zeitverlauf der Leiterströme	111
96	Nullkomponente	112
97	Null- und Mitsystem	113
98	Null-, Mit- und Gegensystem	114
99	Verifikation der Ergebnisse	115
100	Lage der Raumzeiger zu verschiedenen Zeitpunkten	117
101	Magnetisch gekoppelte Spulen, eisenlos	118
102	Gegen-Reihenschaltung	118
103	Gleichsinnige Reihenschaltung	119
104	Gegensinnige Reihenschaltung	119
105	Leerlaufversuch	122
106	Leerlaufversuch	123
107	Unsymmetrisch belasteter Drehstromtransformator	125
108	Schaltung des Drehfeldrichtungsanzeigers	129
109	Teilspannungen bei der Phasenfolge R-S-T	130
110	Teilspannungen bei der Phasenfolge R-T-S	131
111	Maximaler Neutralleiterstrom	132

Tabellenverzeichnis

1	Blindleistung der Grundzweipole	10
2	Schaltungsarten bei Drehstromtransformatoren	60

1 Numerische Hilfsmittel

1.1 Vorbemerkung

Im Wintersemester 2008/09 habe ich die Vorlesung ET4 für die Fachrichtung *Elektrische Energietechnik* an der THM von meinem Kollegen Michael Peppel übernommen, der mir freundlicherweise sein Vorlesungsskript einschließlich der Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt hat. Im Laufe der darauffolgenden Semester habe ich dieses Skript in einigen Punkten erweitert. Mein besonderes Anliegen war und ist es, den Studierenden aufzuzeigen, dass man einige meistens rechenintensive Aufgaben mit numerischen Hilfsmitteln einfacher und bequemer lösen kann. Das entbindet den Anwender dieser Methoden jedoch nicht davon, sich mit den Ansätzen zur Lösung der gestellten Probleme intensiv zu befassen und die gewonnenen Ergebnisse kritisch zu betrachten.

1.2 Zu diesem Skript

Ziel der Ausbildung ist die Vermittlung von Fachwissen und Methoden zur Lösung von Problemen unter Einsatz moderner Hilfsmittel. Zu den Hilfsmitteln eines Ingenieurs gehören heute Digitalrechner mit entsprechenden Anwendungsprogrammen (*Software, Applikation*). Für diese Vorlesung eignen sich vor allem Programme, die komplex rechnen, Differentialgleichungen lösen und integrieren können sowie anspruchsvolle grafische Darstellungen ermöglichen. Abgerundet wird das Ganze durch eine textverarbeitende Software, die über einen Formeleditor, allgemeine Querverweiskapazitäten und Verwaltung von externen Referenzen (Literatur) verfügt. Es ist sicherlich nicht verkehrt, wenn sich Studierende schon frühzeitig solcher Hilfsmittel bedienen.

Das vorliegende Skript erarbeitet Lösungsansätze in analytischer Form, benutzt aber — vor allem bei den Übungsaufgaben — *zusätzlich* numerische Verfahren, um den Aufwand für beide Methoden aufzeigen zu können. Als numerische Hilfsmittel kommen die Programme **gnuplot** und **NGSPICE** bzw. **SCEPTRE** zum Einsatz, die stellvertretend für eine große Anzahl von Programmen mit gleichem Funktionsumfang stehen.

Allen Programmen ist eins gemeinsam: sie gehören zu der Klasse der *Open-Source*-Programme, die für verschiedene Betriebssysteme angeboten und kostenlos im Internet heruntergeladen werden können.

Die Zeichnungen in diesem Skript wurden als Vektorgrafiken mit dem Programm **XFIG**¹ angefertigt, das ganze Skript wurde mit dem Textsatzsystem LuaL^AT_EX, Version 1.07.0 (T_EXLive 2018)² gesetzt.

Da Dokumente mittlerweile vorwiegend interaktiv gelesen werden, wurde als Unterscheidungsmerkmal bei den Diagrammen die Farbe gewählt. Der Index enthält nur besondere Begriffe, die im Zusammenhang mit der jeweiligen Thematik auftauchen. Schlagwörter lassen sich mit den Suchfunktionen des Dokumentenlesers finden. Als weitere Lesehilfe sind Querverweise farblich hervorgehoben und können durch Anklicken direkt aufgesucht werden (*Hypertext*).

Bei den Zahlenbeispielen wird statt des Dezimalkommata der *Dezimalpunkt* verwendet.

¹<https://sourceforge.net/projects/mcj/>

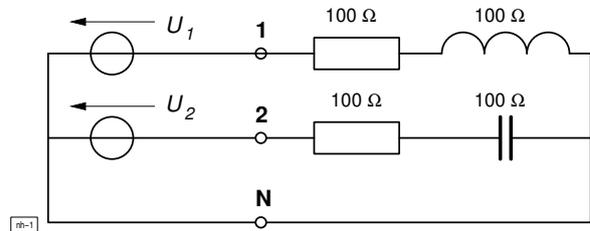
²<https://www.dante.de/>

1.3 GNUPLOT

Das Programm³ dient in erster Linie zum Berechnen und Zeichnen von Funktionen und externen Daten, z. B. Messdaten. Kommandos können interaktiv eingegeben und/oder als Befehlsfolge in einer Datei abgelegt werden (*Batch*). Formeln bzw. mathematische Ausdrücke werden wie in fast allen Programmiersprachen eingegeben. Es steht eine Vielzahl mathematischer Funktionen zur Verfügung. Neben den mächtigen Zeichnungsfunktionen bietet das Programm die Möglichkeit, komplex zu rechnen.

Beispiel

Für die nebenstehende Schaltung sollen die Ströme berechnet werden. Die beiden Spannungen haben den Effektivwert von 200 V, die Spannung \underline{U}_2 ist gegenüber \underline{U}_1 um -120° verschoben. Die Eingabedaten für GNUPLOT sehen folgendermaßen aus:



```

1  j={0,1}
2  a=-0.5+j*0.5*sqrt(3)
3  p180=180/pi
4  phi(x)=atan2(imag(x),real(x))*p180
5  versor(x)=abs(x)+j*phi(x)
6
7  U1=200
8  U2=a*a*U1
9  ZR=100
10 ZL={0,100}
11 ZC={0,-100}
12 I1=U1/(ZR+ZL)
13 I2=U2/(ZR+ZC)
14 I2V=versor(I2)
15
16 show var

```

Komplexe Konstanten werden als Real- und Imaginärteil, durch Komma getrennt, in geschweiften Klammern deklariert. Zeile 1 definiert den komplexen Operator j . Damit lässt sich z. B. der Drehoperator \underline{a} sehr einfach beschreiben (Zeile 2). Ist der Imaginärteil gleich Null, kann auf die geschweifte Klammer verzichtet werden (Zeilen 7 und 9).

Wiederholte Rechenoperationen können durch Definitionen eigener Funktionen vereinfacht werden (Zeilen 4 und 5). Die Funktion $\text{phi}(x)$ berechnet den Phasenwinkel einer komplexen Größe x aus Real- und Imaginärteil *in allen vier Quadranten*. Die Funktion $\text{versor}(x)$ erzeugt eine „komplexe Variable“ mit der Amplitude als Realteil und dem Phasenwinkel in Grad als Imaginärteil. Diese „Variable“ dient nur als Ergebnisvariable (siehe Zeile 14). Die Konstante p180 (Zeile 3) dient zum Umrechnen der Winkel von Grad nach rad und umgekehrt.

³www.gnuplot.info, <https://sourceforge.net/projects/gnuplot/>

Die eigentliche Berechnung der gesuchten Wechselströme geschieht mit den Zeilen 12 und 13. Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass sich durch Anwendung der komplexen Rechnung die Berechnung von Wechselstromnetzen genauso gestaltet wie bei Gleichstromnetzen.

Die Anweisung `show var` listet den Wert aller Variablen auf.

```

1  j = {0.0, 1.0}
2  a = {-0.5, 0.866025403784439}
3  p180 = 57.2957795130823
4  U1 = 200
5  U2 = {-100.0, -173.205080756888}
6  ZR = 100
7  ZL = {0.0, 100.0}
8  ZC = {0.0, -100.0}
9  I1 = {1.0, -1.0}
10 I2 = {0.366025403784439, -1.36602540378444}
11 I2V = {1.41421356237309, -75.0}

```

Die Ergebnisse lassen sich auf einfacher Weise auch grafisch darstellen. Mit der Anweisung `set arrow from ... to ...` lassen sich beliebige Vektoren zeichnen. Um das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme zu erhalten, ergänzt man das Beispiel um folgende Anweisungen:

```

1  set arrow to real(U1), imag(U1)
2  set arrow to real(U2), imag(U2)
3  set arrow to real(I1), imag(I1)
4  set arrow to real(I2), imag(I2)
5  plot 0

```

Für ein ansprechendes Diagramm bedarf es weiterer Anweisungen, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

1.4 NGSPICE

Das Programm⁴ gehört zu der Kategorie der Netzwerk-Analyse-Programme. Es bietet die Möglichkeit, ein elektrisches Netzwerk zu berechnen. Im vorliegenden Fall wird statt **NGSPICE** das Programm **SCEPTRE** eingesetzt. Allen Programmen gemeinsam ist die Vorgabe der Netzwerktopologie, d. h. Lage und Anordnung der Netzwerkelemente. Dies geschieht mit der sogenannten *Netz(werk)liste*, die für jedes Element des Netzwerkes im Prinzip folgendes Format hat:

element knoten1 knoten2 wert

Dabei wird angenommen, dass der Strom durch *element* von *knoten1* nach *knoten2* fließt und *element* den Wert *wert* hat. Im allgemeinen werden die Netzwerkelemente durch den Anfangsbuchstaben klassifiziert, also R..., L..., usw.. Zur Berechnung stehen im allg. eine Gleichstrom- (DC), Wechselstrom- (AC) und Zeitanalyse (TR) zur Verfügung.

Für das gleiche Beispiel sehen die Eingabedaten für SCEPTRE folgendermaßen aus:

⁴<http://ngspice.sourceforge.net/>

```

1 ELEMENTS
2   E1, N - 1 = (200.,0.), DEGREES
3   E2, N - 2 = (200.,-120), DEGREES
4   R1, 1 - 1a = 100
5   L1, 1a - N = 0.3183
6   C2, 2 - 2a = 3.1831E-5
7   R2, 2a - N = 100
8 OUTPUTS
9   E1, E2, IR1, VL1, IC2, VC2, COMPLEX
10 RUN CONTROLS
11   RUN AC
12   FREQUENCY = 50

```

Die Werte der Elemente L1 und C2 müssen vor her aus der Impedanz $100\ \Omega$ ausgerechnet werden. Durch Voranstellen der Buchstaben I bzw. V vor den Namen eines Elementes erhält man den Strom durch bzw. die Spannung an diesem Element, z. B. für die Ausgabe der Ergebnisse (Zeile 9).

SCEPTRE liefert mit diesen Eingabedaten folgende Resultate:

1	FREQ		5.00000E+01
2	E1	(COMPLEX)	2.00000E+02 0.00000E+00
3	E2	(COMPLEX)	-1.00000E+02 -1.73205E+02
4	IR1	(COMPLEX)	1.00003E+00 -1.00000E+00
5	VL1	(COMPLEX)	9.99969E+01 1.00000E+02
6	IC2	(COMPLEX)	3.66025E-01 -1.36603E+00
7	VC2	(COMPLEX)	-1.36603E+02 -3.66025E+01

GNU PLOT und **SCEPTRE** bzw. **NGSPICE** liefern die gleichen Ergebnisse. Die Lösungsansätze sind unterschiedlich. Bei den Netzwerk-Analyse-Programmen genügt es im Prinzip, die Topologie der Schaltung in Form einer Liste (oder grafisch) vorzugeben. Das Aufstellen und Lösen der erforderlichen Gleichungen erledigt das Programm. Bei **GNU PLOT** muss der Anwender auch den Lösungsansatz vorgeben, das Programm besorgt nur die Rechnung und grafische Darstellung.

2 Leistung bei Wechselstrom

2.1 Augenblicks- und Mittelwert

Die elektrische Leistung ist bekanntlich allgemein „Spannung mal Strom“. Bei Gleichstrom erhält man so $P = U I$.

Wenn man diesen Zusammenhang auf zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme anwendet, erhält man die *Augenblicksleistung*

$$p(t) = u(t) i(t)$$

Die Augenblicksleistung ist zeitlich veränderlich. Sie kann bei sinusförmigen Wechselvorgängen zeitweilig positiv, null oder negativ sein. Sie ist daher wenig aussagekräftig.

Die Augenblicksleistung kann *nicht* durch komplexe Rechnung ermittelt werden. Das dabei ermittelte Ergebnis hat leider mit der physikalischen Wirklichkeit nichts zu tun.

Für die Wirkung der elektrischen Energie bei Wechselstrom ist der Energieumsatz in einer Periode entscheidend.

Dieser ist

$$W = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T u(t) i(t) dt \quad \text{mit} \quad [W] = 1 \text{Ws} = 1 \text{Nm} = 1 \text{J}$$

Bezieht man diesen Energieumsatz auf die Periodendauer, so erhält man den *Mittelwert der Leistung* während einer Periode. Dieser heißt *Wirkleistung*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

2.1.1 Wechselstromleistung im ohmschen Zweipol

Augenblickswert:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \sin \omega t = \hat{U} \cdot \hat{I} \sin^2 \omega t = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

Mittelwert:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2T} \left(\int_0^T 1 dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2T} \left((T - 0) - \frac{1}{2\omega} \left(\frac{\sin 4\pi}{0} - \frac{\sin 0}{0} \right) \right) = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2}$$

Siehe Abb. 1.

Mit den *Effektivwerten* $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ und $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ ergibt sich daraus die *Wirkleistung des ohmschen Zweipols*

$$P = U I$$

Dieser Ausdruck entspricht formal der Gleichstromleistung. Dies ist kein Zufall, der obige Zusammenhang hat einmal zur „Erfindung“ des Effektivwertbegriffes geführt.

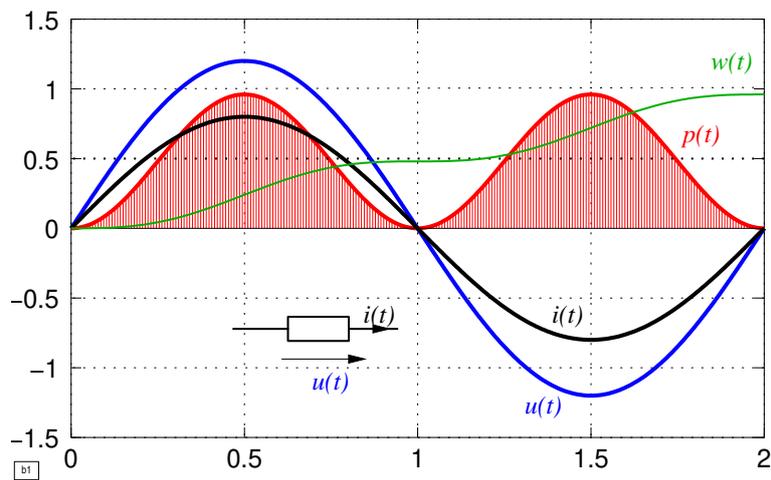


Abb. 1: Spannung, Strom, Energie und Leistung an einem Widerstand

2.1.2 Wechselstromleistung des induktiven Zweipols

Entsprechend Abb. 2 ergibt sich für die Augenblicksleistung

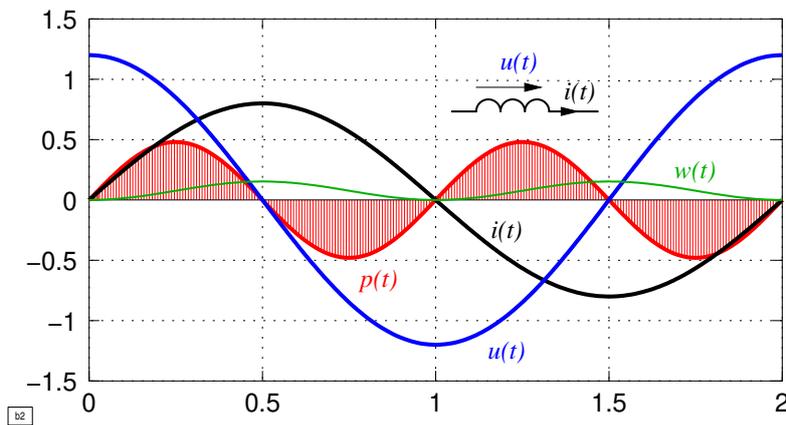


Abb. 2: Spannung, Strom, Energie und Leistung an einer Induktivität

$$p(t) = \hat{U} \cos \omega t \cdot \hat{I} \sin \omega t = \hat{U} \cdot \hat{I} \frac{1}{2} \sin 2\omega t = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \sin 2\omega t .$$

Wirkleistung des induktiven Zweipols: $P = 0$.

2.1.3 Wechselstromleistung des kapazitiven Zweipols

Entsprechend Abb. 3 ergibt sich für die Augenblicksleistung

$$p(t) = \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \cos \omega t = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \sin 2\omega t .$$

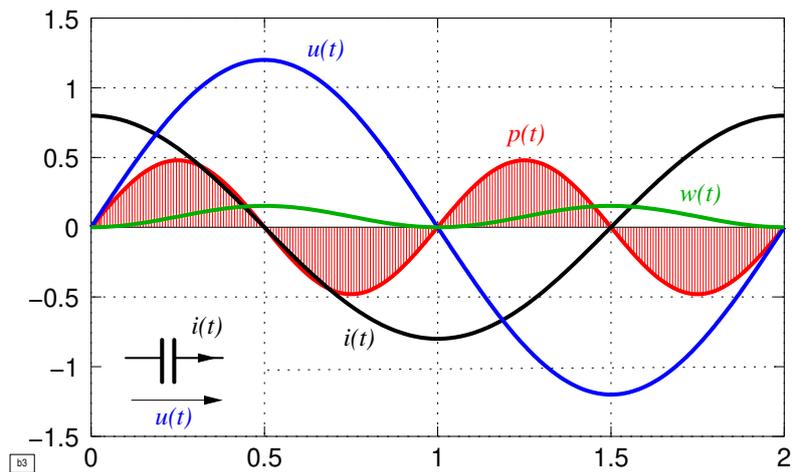


Abb. 3: Spannung, Strom, Energie und Leistung an einer Kapazität

Wirkleistung des kapazitiven Zweipols: $P = 0$.

2.1.4 Wirkleistung des allgemeinen Zweipols

Für eine beliebige Impedanz Z soll gelten:

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Für die Augenblicksleistung (siehe Abb. 4) gilt dann

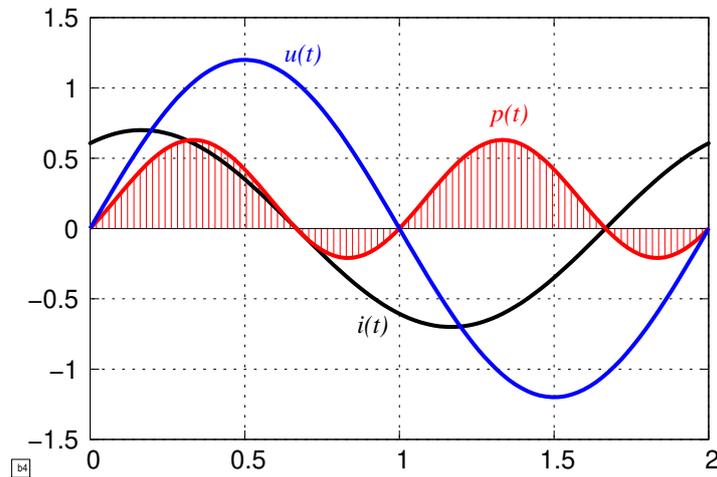


Abb. 4: Spannung, Strom und Leistung an einer Impedanz

$$p(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Allgemein gilt:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Setzt man $\alpha = \omega t + \varphi_u$ und $\beta = \omega t + \varphi_i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} [\cos(\omega t + \varphi_u - \omega t - \varphi_i) - \cos(\omega t + \varphi_u + \omega t + \varphi_i)] \\ &= \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \end{aligned}$$

Für den Mittelwert erhält man mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_z$

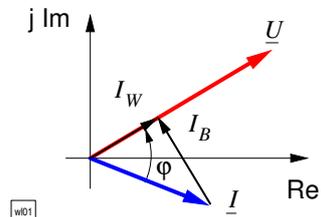
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2T} \int_0^T [\cos \varphi_z - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] dt \\ &= \frac{\hat{U} \hat{I}}{2T} \left[\cos \varphi_z \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt \right] \\ &= \frac{\hat{U} \hat{I}}{2T} \left[T \cos \varphi_z - \frac{1}{2\omega} \left(\underbrace{\sin(4\pi + \varphi_u + \varphi_i) - \sin(\varphi_u + \varphi_i)}_0 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{P = U I \cos \varphi_z}$$

2.2 Wirkstrom und Blindstrom

Betrachtet wird ein Zweipol, der eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom bewirkt.

☞ **Definition:** Der Phasenverschiebungswinkel φ wird hier festgesetzt als der Winkel der Spannung gegenüber dem Strom. Er ist damit gleich dem Impedanzwinkel φ_z .



Den Strom I kann man nun aufteilen in eine mit der Spannung phasengleiche Komponente, den sog. *Wirkstrom* I_W , und eine gegenüber der Spannung um 90° phasenverschobene Komponente, den sog. *Blindstrom* I_B .

Für den Wirkstrom I_W ergibt sich dann: $I_W = I \cos \varphi$.

Die Richtung des Blindstroms wird so festgelegt, dass gilt: $I_B = I \sin \varphi$.

☞ **Definition:** Induktiver Blindstrom wird damit als positiv definiert.

Als zeitlicher Mittelwert der Augenblicksleistung ergibt sich die Wirkleistung zu:

$$P = U I \cos \varphi .$$

Der Wirkstrom ist

$$I_W = I \cos \varphi .$$

Damit wird

$$P = U I_W .$$

Das bedeutet aber: ☞ die Nutzleistung überträgt allein der Wirkstrom!

Der Blindstrom überträgt dagegen im Mittel keine Leistung. Er vergrößert aber den Betrag des Gesamtstroms. Damit steigen auch die Übertragungsverluste ($P_V = R_V I^2$). Außerdem müssen alle Betriebsmittel für den Gesamtstrom ausgelegt werden. Blindstrom treibt daher den Aufwand und die Kosten in die Höhe.

Glücklicherweise addieren sich Wirk- und Blindstrom nicht direkt sondern geometrisch. Ihre Quadrate werden addiert:

$$I^2 = I_W^2 + I_B^2 .$$

☞ Der Wirkstrom ist nützlich. Der Blindstrom ist meistens störend.

2.3 Blindleistung

Die Wirkleistungs-Aufnahme eines Zweipols ist $P = U I \cos \varphi = U I_W$.

Dazu kann man formal eine analoge Größe definieren: die *Blindleistung* $Q = U I_B$.

Wenn man in diesen Ausdruck I_B durch $I \sin \varphi$ ersetzt, erhält man:

$$Q = U I \sin \varphi .$$

Bei induktiven Verbrauchern mit nacheilendem Strom wird Q wegen der Festlegungen der Richtungen des Winkels φ und des Blindstroms positiv, bei kapazitiven Verbrauchern wird Q dagegen negativ. Also gilt:

☞ **Definition: Induktive Blindleistung wird als positiv definiert.**

Die Blindleistung ist im Grunde eine reine Rechengröße ohne physikalische Bedeutung. Sie wird aber dennoch häufig benutzt. Ihre praktische Bedeutung ist erheblich.

Tabelle 1 zeigt die Blindleistungen der Grundzweipole.

Nach Definition wird induktive Blindleistung positiv, kapazitive Blindleistung negativ gezählt (im Verbraucher-Zählpeilsystem).

☞ $L \equiv$ „Blindleistungsverbraucher“, $C \equiv$ „Blindleistungserzeuger“

2.4 Scheinleistung

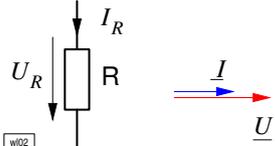
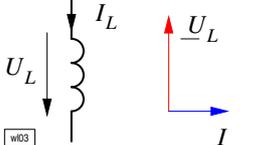
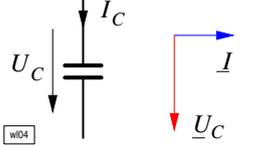
Als *Scheinleistung* S bezeichnet man das formale Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom ohne Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebung:

$$S = UI$$

Auch die Scheinleistung S ist eine formale Rechengröße ohne physikalische Bedeutung.

Dagegen erfolgt die Auslegung von Geräten und Anlagen meistens nach der Scheinleistung. Sie bestimmt daher Volumen, Gewicht und Preis der Geräte. Sie hat also eine große technisch-wirtschaftliche Bedeutung.

Tabelle 1: Blindleistung der Grundzweipole

	$\varphi_z = 0$	$Q = 0$
	$\varphi_z = +90^\circ$	$Q = +U I$
	$\varphi_z = -90^\circ$	$Q = -U I$

Beispiel: die Verluste in elektrischen Leitungen hängen entsprechend dem ohmschen Gesetz ($P_V = I^2 R$) vom Betrag des Stromes ab, nicht aber von seiner Phasenverschiebung zur Spannung. Damit hängen bei gegebener Spannung auf der Leitung die Verluste — und damit der notwendige Leiterquerschnitt — von der übertragenen Scheinleistung und nicht von der Wirkleistung ab.

Die Blindleistung ist eine Größe, die die Scheinleistung vergrößert, ohne die Wirkleistung zu erhöhen. Sie ist wichtig, denn sie verursacht Kosten ohne Nutzeffekt.

2.5 Zusammenhang zwischen den Leistungsgrößen

Wirkleistung: $P = U I \cos \varphi$

Blindleistung: $Q = U I \sin \varphi$

Scheinleistung: $S = U I$

Damit ergibt sich wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad \text{oder} \quad \boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}} .$$

Bezeichnungen:

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi \quad \text{Leistungsfaktor}$$

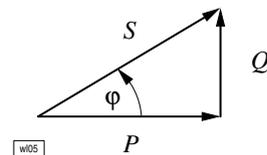
$$\frac{Q}{S} = \sin \varphi \quad \text{Blindfaktor}$$

Einheiten:

Wirkleistung $[P] = 1 \text{ W}$

Scheinleistung $[S] = 1 \text{ VA}$

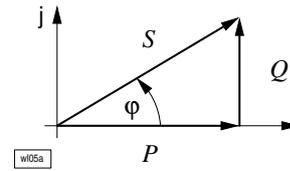
Blindleistung $[Q] = 1 \text{ var}$ („reaktiv“)



2.6 Komplexe Leistung

Dieses Leistungsdreieck kann man auch komplex darstellen, indem man die P-Achse als reelle Achse und die Q-Achse als imaginäre Achse ansieht. Man erhält dann die komplexe Leistung

$$\underline{S} = P + jQ$$



Mit $P = UI \cos \varphi$ und $Q = UI \sin \varphi$ ergibt sich

$$\underline{S} = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \text{oder} \quad \underline{S} = S e^{j\varphi}$$

Wegen $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ gilt aber auch:

$$\underline{S} = UI e^{j\varphi_u} e^{j(-\varphi_i)} = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i}, \quad \text{also}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* \quad \text{und damit} \quad P = \Re\{\underline{U} \underline{I}^*\}, \quad Q = \Im\{\underline{U} \underline{I}^*\} \quad (1)$$

\underline{I}^* ist die *konjugiert komplexe* Größe zum komplexen Effektivwert \underline{I} . Aus Gleichung (1) folgt wegen $\underline{U} = \underline{I} \underline{Z}$ weiterhin

$$\underline{S} = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I}^2 = \frac{\underline{U} \underline{U}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} \quad \text{wegen} \quad e^{+j\varphi} e^{-j\varphi} = 1$$

Hier ist ein Bruch in der komplexen Wechselstromrechnung ($\underline{U} \underline{I}^*$ statt $\underline{U} \underline{I}$).

2.7 Leistungsanpassung

Wie muss die komplexe Lastimpedanz \underline{Z}_L aussehen, damit die Last aus der gegebenen Quelle ($\underline{U}_0, \underline{Z}_i$) die größtmögliche *Wirkleistung* erhält (Abb. 5)?

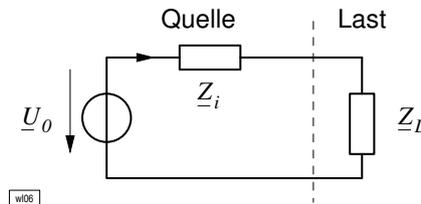


Abb. 5: Leistungsanpassung

$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \quad (\text{Reihenersatzschaltbild})$$

$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$P_L = I^2 R_L = U_0^2 \frac{R_L}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_L|^2} = U_0^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$$

Diese Formel beschreibt allgemein die Wirkleistungsaufnahme der Last bei gegebener Quellenspannung und gegebenen komplexen Innen- und Lastimpedanzen⁵.

Wie müssen R_L und X_L gewählt werden, damit die Leistung P_L maximal wird?

⁵vgl. bei Gleichstrom $P_L = U_0^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2}$

- X_L kommt nur in dem Nennerglied $(X_L + X_i)^2$ vor. Dieser Ausdruck ist immer größer oder gleich Null. Damit wirkt er immer leistungsvermindernd. X_L muss also so gewählt werden, dass $(X_L + X_i)^2$ möglichst klein wird, also $(X_L + X_i)^2 = 0$. Daraus ergibt sich:

$$X_L = -X_i .$$

- Wird $X_L = -X_i$ gesetzt, wird $P_L = U_0^2 \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2}$. Diese Formel ist identisch mit der Formel für Gleichstrom. Damit ist auch der Wert des Lastwiderstandes R_L identisch mit dem bekannten Wert für Gleichstrom, also

$$R_L = R_i .$$

Damit lautet die Anpassungsbedingung für Wechselstrom:

$$\boxed{\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^*} .$$

2.8 Wirkungsgrad

Für die Schaltung nach Abb. 5 ergibt sich für den elektrischen (Übertragungs-)Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_L}{P_{\text{Gesamt}}} .$$

Die Gesamtleistung ist dabei die Summe aus P_L und der Verlustleistung im Innenwiderstand der Quelle, also

$$P_{\text{Gesamt}} = P_L + P_V$$

$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L \quad \Rightarrow \quad P_L = R_L I^2$$

$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \quad \Rightarrow \quad P_V = R_i I^2$$

$$\eta = \frac{R_L I^2}{(R_L + R_i) I^2} = \frac{R_L}{R_L + R_i} \quad (\text{vgl. Gleichstrom}) .$$

☞ Der Übertragungswirkungsgrad wird *nicht* von den Blindwiderständen im Kreis beeinflusst! Dies gilt nur, wenn durch R_L und R_i der selbe Strom fließt.

2.9 Blindleistungskompensation

Gegeben ist eine Schaltung nach Abb. 6 links. Die Impedanz \underline{Z} der Last ergibt sich aus

$$\underline{Z} = R + jX_L .$$

Entsprechend setzt sich der Strom I in der Leitung aus einer Wirk- und einer Blindkomponente zusammen:

$$\underline{I} = I_W + jI_B .$$

2 Leistung bei Wechselstrom

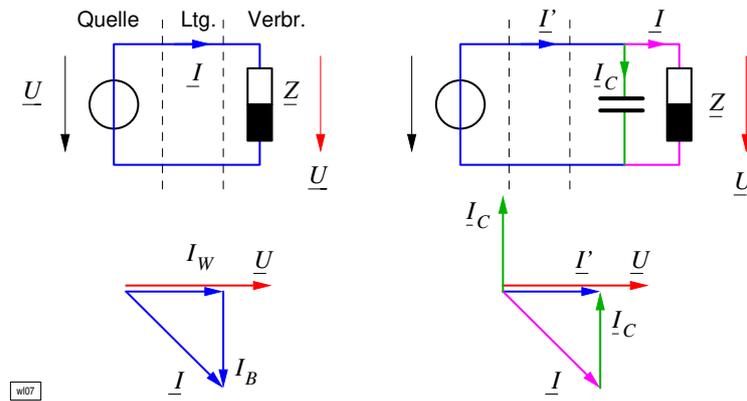


Abb. 6: Blindleistungskompensation

Frage: Wie hält man den Blindstrom von der Quelle und der Leitung fern?

Lösung: *Parallelkompensation* nach Abb. 6 rechts.

Der Blindanteil für die Last Z wird durch eine Kapazität geliefert. Der Kondensatorstrom I_C kompensiert den Blindstrom I_B , durch Quelle und Leitung fließen, wenn $I_B = -I_C$ ist, nur der Wirkstrom $I_W = I'$.

Man kann im Prinzip den Kompensationszweigpol auch in Reihe zum Verbraucher schalten (*Serienkompensation*). Dabei riskiert man aber eine deutliche Spannungsüberhöhung am Verbraucher.

3 Drehstromsystem

Ein so genanntes Drehstromsystem (die exakte Bezeichnung ist *symmetrisches Dreiphasensystem*) ist die Zusammenschaltung von drei Wechselstromkreisen, den so genannten Phasen, mit

- gleicher Frequenz
- gleicher Amplitude
- einer Phasenverschiebung der Phasen untereinander von jeweils $T/3$, also 120° .

3.1 Bedeutung

- Die öffentlichen Energieversorgungsnetze aller Industriestaaten sind Drehstromnetze. Sie erreichen fast jedes Haus. Klassische Wechselstromsysteme gibt es fast nur innerhalb von Gebäuden. Man gewinnt sie aus dem speisenden Drehstromnetz, indem man nur eine der drei Phasen verwendet.
- Drehstrommotoren sind das Rückgrat der elektrischen Antriebstechnik. Diese Motoren sind einfach, robust und wartungsarm. Heute kann man sie auch gut in der Drehzahl verstellen. Daher verdrängen sie mehr und mehr die anderen Motorarten. Der Anwendung zur Speisung von Motoren verdankt das Drehstromsystem seinen Namen.

3.2 Zeitverläufe

Abb. 7 zeigt die Zeitverläufe der Spannungen der drei Phasen, bezeichnet mit U,V und W. Die Phase V eilt der Phase U um 120° nach, die Phase W um 240° (positive Phasenfolge).

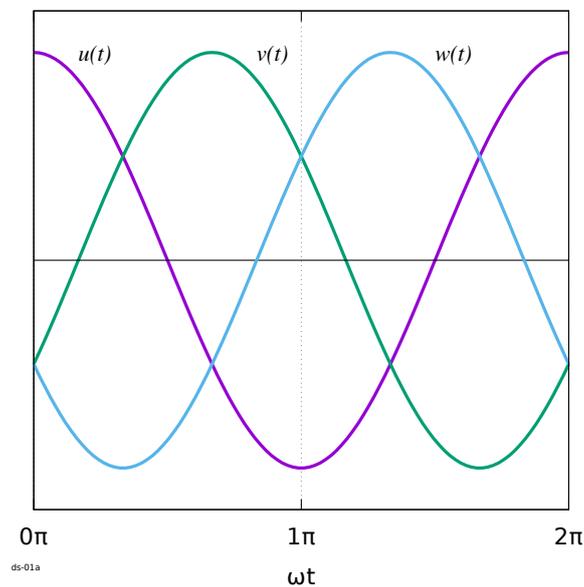


Abb. 7: Zeitverlauf bei positiver Phasenfolge

3.3 Komplexe Darstellung

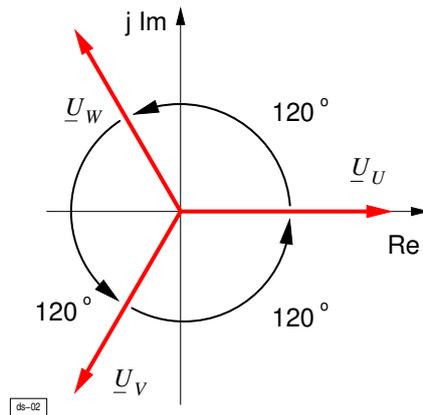


Abb. 8: Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene

Die Darstellung als Zeiger in der komplexen Ebene zeigt Abb. 8.

3.4 Drehsinn

Im üblichen Fall (positiver Drehsinn) eilt die Phase V der Phase U um 120° nach. Die Phase W eilt U um 240° nach. Ein System mit umgekehrtem Drehsinn erhält man, wenn V der Phase U um 120° und W der Phase U um 240° voreilt (Abb. 9). Der Drehsinn kehrt sich um, wenn man

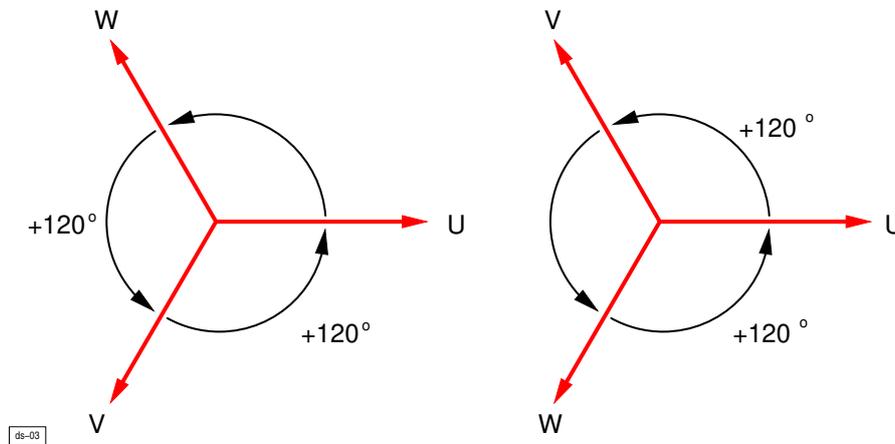


Abb. 9: Positiver und negativer Drehsinn

zwei Phasen vertauscht. Bei der Umkehr des Drehsinns ändert sich auf den ersten Blick wenig, aber Drehstrommotoren wechseln dann die Drehrichtung. Daher ist die korrekte Phasenfolge immer einzuhalten. In dieser Vorlesung wird der positive Drehsinn als Regelfall angenommen.

3.5 Vorteile gegenüber dem einfachen Wechselstrom

- Die gesamte Augenblicksleistung des Systems ist zeitlich konstant. Dies gilt aber nur unter bestimmten Voraussetzungen.

- Drehstrom lässt sich vorteilhaft erzeugen. Drehstromgeneratoren sind wartungsarm und lassen sich bis zu höchsten Leistungen bauen.
- Der Aufwand für die Übertragung ist gering. Bei gleicher Übertragungsleistung ist der Leitungsaufwand niedriger als bei Wechselstrom.
- Es gibt sehr gute Drehstrommotoren. Einphasen-Wechselstrommotoren sind dagegen in Betrieb und Wartung ungünstig und lassen sich für hohe Leistungen kaum realisieren. Außerdem erzeugen Einphasen-Wechselstrommotoren Pulsationsmomente mit der doppelten Frequenz.

3.6 Mathematische Formulierung

Die Phase U kann im Allgemeinen eine beliebige Phasenlage φ_u in Bezug auf den Zeitnullpunkt haben. Da die Phasenverschiebungen der Phasen untereinander fest sind, wird das gesamte System um φ_u gedreht (Abb. 10). In komplexer Darstellung ergibt sich damit für die Spannungen

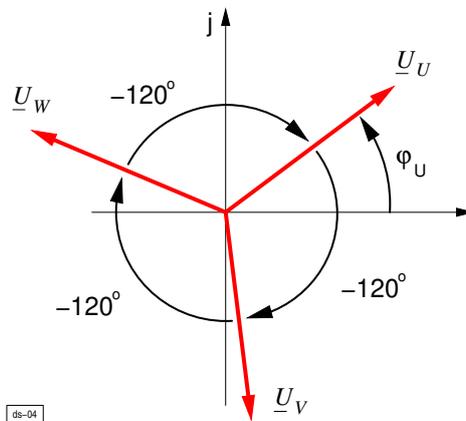


Abb. 10: Dreiphasensystem mit beliebiger Phasenlage

der drei Phasen

$$\underline{U}_U = U e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{U}_V = U e^{j\varphi_u} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{U}_U e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{U}_W = U e^{j\varphi_u} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_U e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

oder

$$\underline{U}_V = \underline{U}_U e^{+j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{U}_W = \underline{U}_U e^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

3.7 Der komplexe Faktor \underline{a}

Um die komplexe Darstellung der Ströme und Spannungen eines Drehstromsystems einfacher und übersichtlicher zu gestalten, wird eine komplexe Zahl \underline{a} eingeführt. Sie wird folgendermaßen definiert :

$$\underline{a} = e^{+j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Damit ergibt sich für die Spannungen der drei Phasen :

$$\underline{U}_U = U_U$$

$$\underline{U}_V = U_U \underline{a}^2$$

$$\underline{U}_W = U_U \underline{a}$$

Die komplexe Zahl \underline{a} hat folgende Eigenschaften:

$$|\underline{a}| = 1$$

$$\underline{a}^2 = \frac{1}{\underline{a}} = \underline{a}^* = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j \frac{2\pi}{3}} = e^{+j \frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{a}^3 = 1 \quad \underline{a}^4 = \underline{a} \quad \underline{a}^5 = \underline{a}^2 \quad \dots$$

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$$

Multiplikation mit dem Operator \underline{a} bewirkt eine Drehung um 120° . Zum Vergleich: der Operator j bewirkt eine Drehung um 90° .

3.8 Symmetrieeigenschaften

Die Summe der komplexen Effektivwerte der drei Phasen eines symmetrischen Drehstromsystems ist stets Null (Abb. 11).

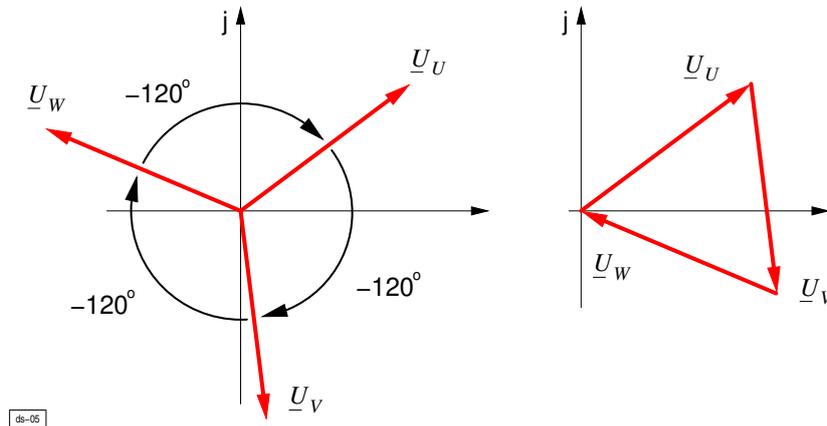


Abb. 11: Summe der komplexen Effektivwerte im Zeigerdiagramm

$$\underline{U}_U + \underline{U}_V + \underline{U}_W = 0$$

(2)

Die Summe der Momentanwerte der drei Phasen eines symmetrischen Drehstromsystems ist zu jedem Zeitpunkt Null (Abb. 12).

$$U_u(t) + U_v(t) + U_w(t) = 0$$

3.9 Offenes Dreiphasensystem

Die drei Spannungsquellen sind nicht miteinander verbunden und speisen jeweils eigene Verbraucher (Abb. 13). Diese Schaltung verhält sich genauso wie drei unabhängige Wechselstromsysteme. Besondere Vorteile durch das symmetrische Drehstromsystem ergeben sich zunächst nicht.

Diese Schaltung ist ungebräuchlich.

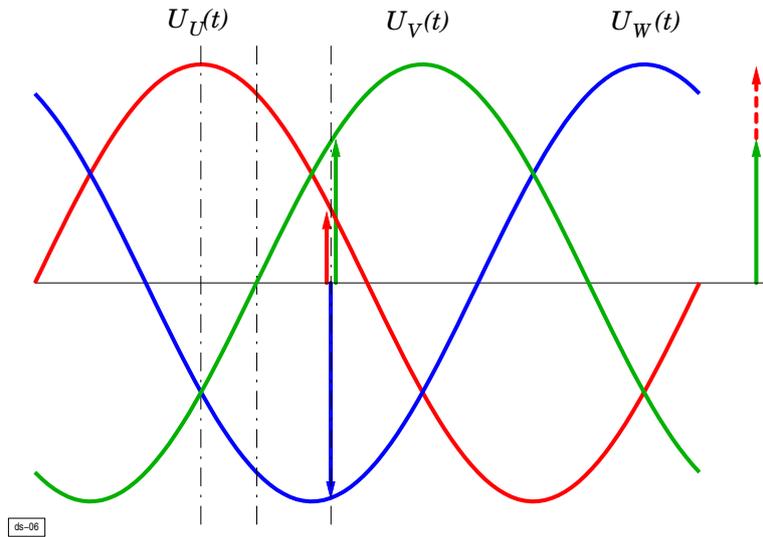


Abb. 12: Summe der komplexen Effektivwerte im Zeitdiagramm

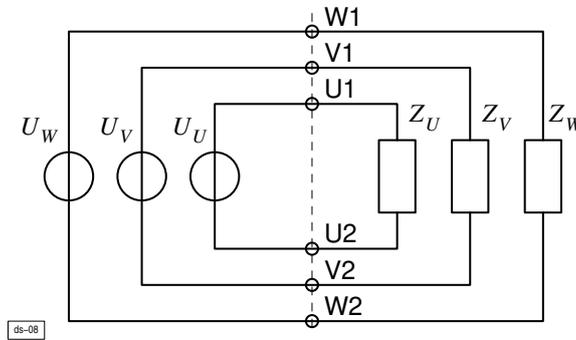


Abb. 13: Offene Schaltung

3.10 Sternschaltung mit Neutralleiter

Abb. 14 zeigt zwei identische Schaltungen, die sich nur durch die Anordnung der drei Quellen unterscheiden. Die linke Schaltung bringt die zeitlich/räumliche Versetzung der Quellen um 120° zum Ausdruck und hat mehr „didaktischen“ Charakter. Die rechte Anordnung ist die gebräuchlichste in Schaltungsunterlagen.

Die 3 Spannungsquellen werden einpolig miteinander verbunden (jeweils die „2“-Anschlüsse). Dadurch werden 3 Leitungen zum *Neutralleiter*⁶ N zusammengefasst. Es entsteht ein *Vierleiter-system*. Durch die Potentialverbindung der 3 Quellen kommen die Vorteile des Drehstromsystems zum Tragen. Die 3 Quellen kann man einzeln belasten. Dabei gleichen sich die Ströme im Neutralleiter teilweise aus ($I_N < I_{L1} + I_{L2} + I_{L3}$). I_N kann sogar Null werden. Die Schaltung stellt *zwei* Drehspannungssysteme zur Verfügung, da die Differenzspannung der 3 Quellen wieder ein Drehspannungssystem bilden.

Die *Sternspannungen* (*Phasenspannungen*) $\underline{U}_{1N}, \underline{U}_{2N}, \underline{U}_{3N}$ sind die Quellenspannungen U_U, U_V, U_W . Sie bilden das erste Drehspannungssystem.

⁶früher Mittelpunktsleiter Mp

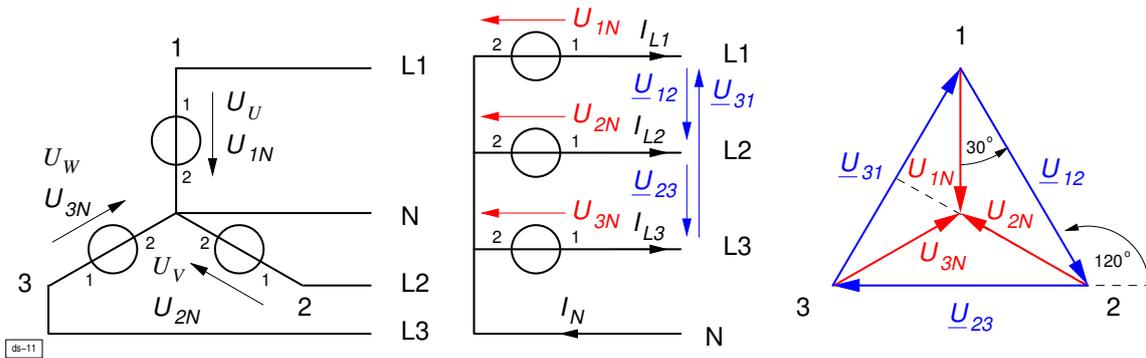


Abb. 14: Sternschaltung mit Neutraleiter

Die Außenleiterspannungen (verkettete Spannungen) $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ bilden ein zweites Drehspannungssystem. Es gilt:

$$\underline{U}_{23} = \underline{a}^2 \underline{U}_{12} \quad \underline{U}_{31} = \underline{a} \underline{U}_{12} \quad \text{mit} \quad \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{U}_U e^{+j\frac{\pi}{6}}$$

Die Außenleiterspannungen sind $\sqrt{3}$ mal größer als die Sternspannungen und eilen diesen um 30° vor.

Der Faktors $\sqrt{3}$ lässt sich mathematisch durch Anwendung der trigonometrischen Funktionen oder grafisch über die Konstruktion des Zeigerdreiecks nachweisen.

3.11 Sternschaltung ohne Neutraleiter

Man kann ein Drehstromsystem so betreiben, dass der Strom im Neutraleiter stets Null ist. In diesem Fall kann man den Neutraleiter weglassen. Man erhält ein *Dreileitersystem* (siehe Abb. 15).

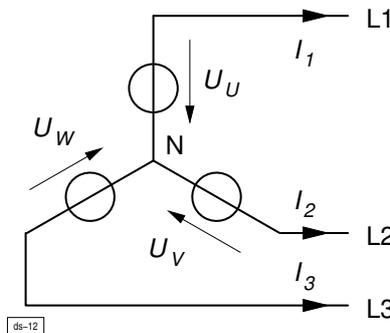


Abb. 15: Sternschaltung ohne Neutraleiter

Im Dreileitersystem gilt $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Vorteile: Man spart einen Leiter. $I_N = 0$ ist für viele Betriebsmittel günstig.

Nachteile: Man hat nur noch die verketteten Spannungen zur Verfügung ($\sqrt{3} U$ -Spannungssystem). Bei unsymmetrischer Belastung wird die „Stromsumme am Knoten N = 0“ erzwungen.

3.12 Dreieckschaltung

Da die Summe der Quellenspannungen zu jedem Zeitpunkt Null ist, kann man die drei Quellen auch zu einem Ring zusammenschalten. Das nennt man *Dreieckschaltung* (Abb. 16). Auch die

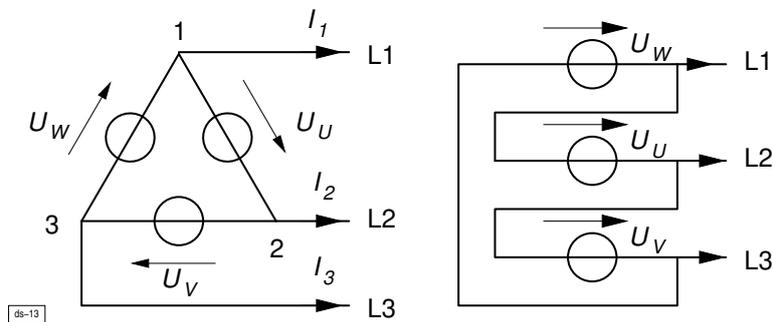


Abb. 16: Dreieckschaltung

Dreieckschaltung bildet ein *Dreileitersystem* mit $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Der einzige Unterschied im Verhalten gegenüber der Sternschaltung ohne Neutraleiter besteht in der kleineren Außenleiterspannung und der Phasenverschiebung.

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_U \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_V \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_W \quad \text{mit} \quad U_{12} = U_U \quad (\text{statt } \sqrt{3} U_U)$$

3.13 Typenschild, weitere Schaltungsarten

Doppelstern, Gabelschaltung, Zickzack

verkettete Größen, Stranggrößen, Messbarkeit

3.14 Anwendungen

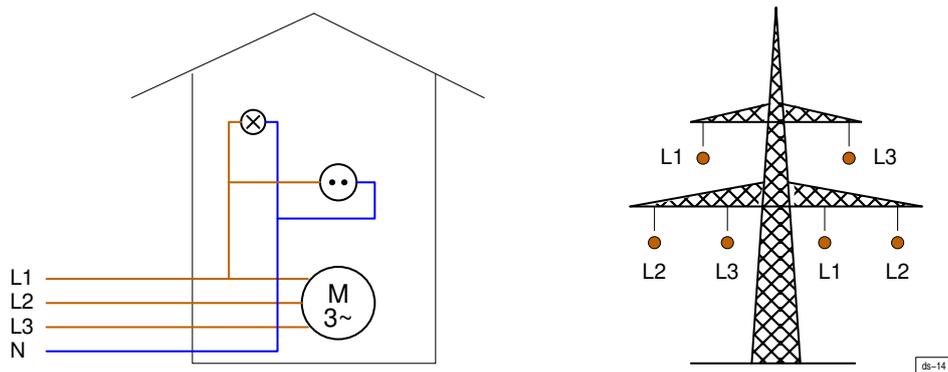


Abb. 17: Anwendungen von Drei- und Vierleitersystemen

1. Vierleitersystem (Y mit N-Leiter) für Energieverteilungsnetze, z.B. Niederspannungsverteilung 400/230 V (Abb. 17 links)

Das Vierleitersystem kann einphasige Verbraucher versorgen.

2. Dreileitersystem (Y oder Δ ⁷) für Energieversorgungsnetze⁸ (Abb. 17 rechts)

Einsparung von Leitungs-km, bessere Ausnutzung der Betriebsmittel (Trafos etc.)

3.15 Symmetrische Belastung

Symmetrische Belastung liegt vor, wenn die drei Leiterströme I_{L1}, I_{L2}, I_{L3} dem Betrage nach gleich groß sind und alle die gleiche Phasenverschiebung gegenüber der zugehörigen Sternspannung (oder Außenleiterspannung) haben (Abb. 18).

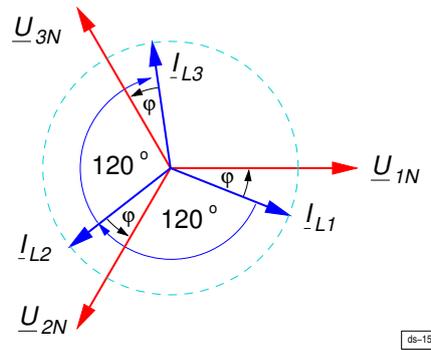


Abb. 18: Zeigerdiagramm bei symmetrischer Belastung

Symmetrische Belastung entsteht

- wenn das Drehspannungssystem symmetrisch mit 3 gleichen Impedanzen Z beschaltet wird
- wenn das Drehspannungssystem eine stationär laufende Drehstrommaschine speist
- wenn zwei Drehspannungssysteme über 3 gleiche Impedanzen gekoppelt werden.

3.15.1 Ströme bei symmetrischer Belastung

Nach Abb. 18 ergibt sich mit $|I_{L1}| = |I_{L2}| = |I_{L3}| = I$ und $\varphi_{(U_{1N}, I_{L1})} = \varphi_{(U_{2N}, I_{L2})} = \varphi_{(U_{3N}, I_{L3})} = \varphi$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L1} &= I e^{j(\varphi_{U_{1N}} - \varphi)} \\ \underline{I}_{L2} &= I e^{j(\varphi_{U_{2N}} - \varphi)} = I e^{j(\varphi_{U_{1N}} - 120^\circ - \varphi)} \\ \underline{I}_{L3} &= I e^{j(\varphi_{U_{3N}} - \varphi)} = I e^{j(\varphi_{U_{1N}} - 240^\circ - \varphi)} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L2} &= \underline{I}_{L1} e^{j(-120^\circ)} = \underline{a}^2 \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L3} &= \underline{I}_{L1} e^{j(-240^\circ)} = \underline{a} \underline{I}_{L1} . \end{aligned}$$

Bei symmetrischer Belastung bilden die drei Außenleiterströme selbst ein symmetrisches Dreiphasensystem.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L1} (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = \mathbf{0} .$$

☞ Bei symmetrischer Belastung ist der Neutralleiterstrom Null.

⁷statt des Symbols Δ benutzt man auch den Buchstaben „D“.

⁸Überlandnetze

3.15.2 Symmetrische Last in Sternschaltung

Bei symmetrischer Belastung ist der Neutralleiterstrom stets Null. Dies hat zwei wichtige Konsequenzen:

1. Man kann den Neutralleiter weglassen.
2. Die Spannung $U_{N1,N2}$ zwischen beiden Neutralpunkten ist stets Null⁹: $U_{N1,N2} = 0$.

Damit sind dann aber die Strangspannungen der Last gleich den Sternspannungen des speisenden Drehspannungssystems (Abb. 19).

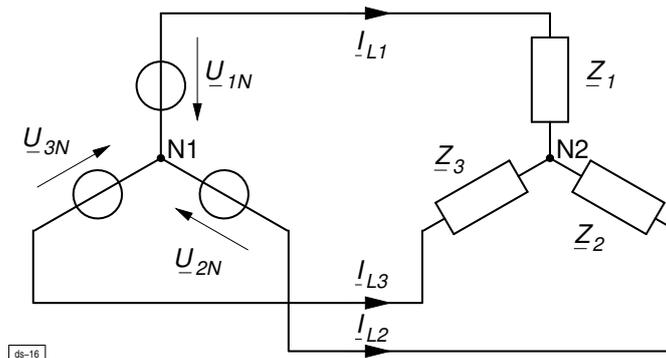


Abb. 19: Symmetrische Last in Sternschaltung

$$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_{1N}$$

$$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_{2N}$$

$$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_{3N}$$

Wegen der Sternschaltung gilt weiterhin:

$$\underline{I}_{Z1} = \underline{I}_{L1}$$

$$\underline{I}_{Z2} = \underline{I}_{L2}$$

$$\underline{I}_{Z3} = \underline{I}_{L3}$$

3.15.3 Symmetrische Last in Dreieckschaltung

An den drei Strängen $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ der Last liegen bei Dreieckschaltung die *Außenleiterspannungen* (Abb. 20), also

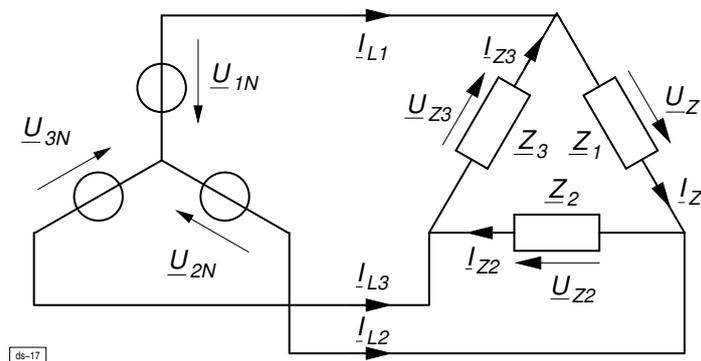


Abb. 20: Symmetrische Last in Dreieckschaltung

⁹auch bei fehlendem Neutralleiter

3 Drehstromsystem

$$\begin{aligned}\underline{U}_{Z1} &= \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j+\frac{\pi}{6}} \\ \underline{U}_{Z2} &= \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j-\frac{3\pi}{6}} \\ \underline{U}_{Z3} &= \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{1N} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j-\frac{7\pi}{6}}\end{aligned}$$

Bei der Dreieckschaltung setzen sich die Leiterströme $\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3}$ aus jeweils zwei Strangströmen zusammen, also:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} &= \underline{I}_{Z1} - \underline{I}_{Z3} = \underline{I}_{Z1} (1 - \underline{a}) = \sqrt{3} \underline{I}_{Z1} e^{j-\frac{\pi}{6}} \\ \underline{I}_{L2} &= \underline{I}_{Z2} - \underline{I}_{Z1} = \underline{I}_{Z1} (\underline{a}^2 - 1) = \sqrt{3} \underline{I}_{Z1} e^{j-\frac{5\pi}{6}} \\ \underline{I}_{L3} &= \underline{I}_{Z3} - \underline{I}_{Z2} = \underline{I}_{Z1} (\underline{a} - \underline{a}^2) = \sqrt{3} \underline{I}_{Z1} e^{j-\frac{9\pi}{6}}\end{aligned}$$

Diese Ströme sind dem Betrage nach um den *Faktor 3* größer als bei der Sternschaltung der gleichen Strangimpedanzen.

3.15.4 Leistung bei symmetrischer Belastung

Nach Abb. 19 gelten für die *Wirk- und Blindleistung* der Phase 1:

$$P_1 = U_{1N} I_{L1} \cos \varphi_{Z1} \qquad Q_1 = U_{1N} I_{L1} \sin \varphi_{Z1} .$$

Aus Symmetriegründen sind die Leistungen der anderen Phasen gleichgroß, also gilt für die Leistung des Gesamtsystems

$$P = 3 U_{1N} I_{L1} \cos \varphi \qquad Q = 3 U_{1N} I_{L1} \sin \varphi .$$

Für die *Augenblicksleistungen* der drei Phasen gilt (siehe dazu auch Abschnitt 2.1.4):

$$\begin{aligned}P_1(t) &= U_{1N} I_{L1} [\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)] \\ P_2(t) &= U_{1N} I_{L1} [\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I - 240^\circ)] \\ P_3(t) &= U_{1N} I_{L1} [\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I - 480^\circ)] \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) &= \boxed{P(t) = 3 U_{1N} I_{L1} \cos(\varphi_U - \varphi_I)}\end{aligned}$$

Die Augenblicksleistung des Gesamtsystems ist *nicht* zeitabhängig. Die zeitabhängigen Anteile der 3 Einzelleistungen löschen sich aus.

Diese Aussage gilt auch, wenn die Last im Dreieck geschaltet ist.

3.15.5 Einphasiges Ersatzschaltbild

Bei der Berechnung von symmetrischen Drehstrombetriebsmittel genügt es in der Regel, nur eine Phase zu betrachten (Abb. 21). Dazu müssen die Leitungs-/Netzströme I und die Außenleiterspannungen U in Abhängigkeit der ausgeführten Schaltung der Phasen (Y oder D) auf die jeweilige Phasengrößen U_1 und I_1 umgerechnet werden (siehe nebenstehende Tabelle). Alle Leistungen gehen nur zu einem Drittel in die einphasige Berechnung ein.

1 ~	U_1	I_1	S_1
D	U	$I/\sqrt{3}$	$S/3$
Y	$U/\sqrt{3}$	I	$S/3$

Zu den symmetrischen Betriebsmittel gehören im allg. Drehstrommotoren, -generatoren, -heizungen. Dagegen kann man Drehstromtransformatoren und -leitungen nur eingeschränkt als symmetrische Betriebsmittel ansehen.

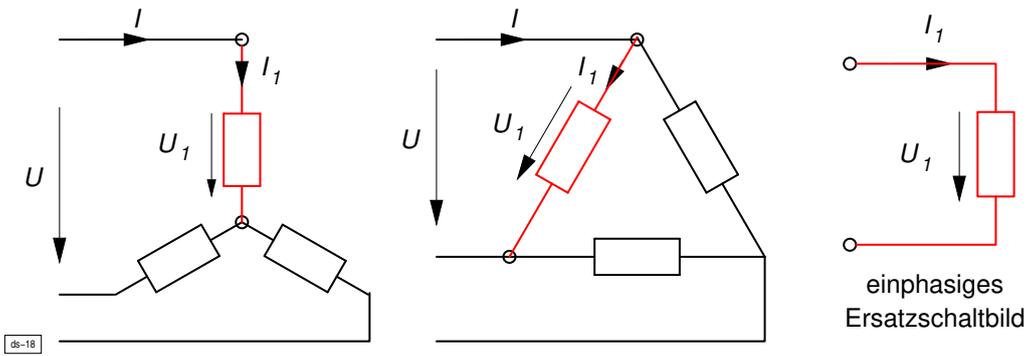


Abb. 21: Einphasiges Ersatzschaltbild (ESB)

3.15.6 Leitungsaufwand

Bei vorgegebener Stromdichte wird zum betriebsmäßigen Führen von I_{L1} der Leiterquerschnitt A benötigt (Abb. 22).

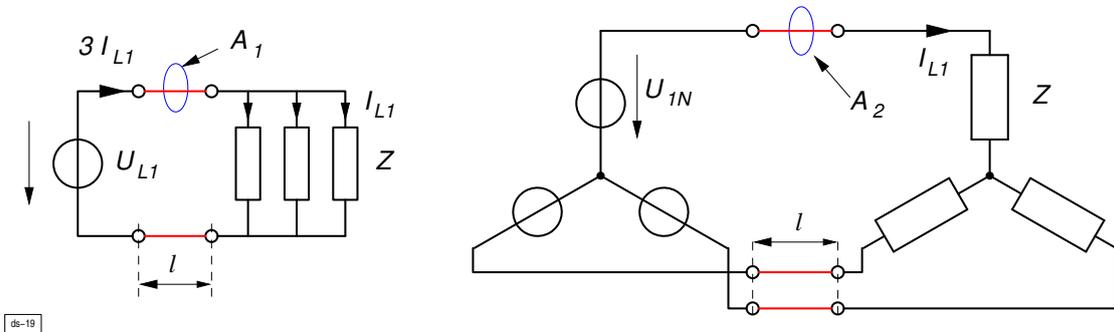


Abb. 22: Leitungsaufwand für einphasiges und dreiphasiges Netz

	Wechselstrom	Drehstrom
Scheinleistung:	$S = 3 U_{L1} I_{L1}$	$S = 3 U_{1N} I_{L1}$
Leitungsquerschnitt:	$A_1 = 3 A$	$A_2 = A$
Gesamtes Leitervolumen:	$V_1 = 2 l A_1 = 6 A l$	$V_2 = 3 l A_2 = 3 A l$
Gesamte Leitermasse:	$M_1 = 6 \rho A l$	$M_2 = 3 \rho A l$

Vergleich:

Y-Schaltung: $\frac{M_2}{M_1} = 50\%$ wegen $U_{12} = \sqrt{3} U_1$

D-Schaltung: $\frac{M_2}{M_1} = 86.6\%$ wegen $U_{12} = U_1$

3.16 Unsymmetrische Belastung im Vierleitersystem

Sind die Lastimpedanzen nicht gleich, wird die Belastung unsymmetrisch. In Vierleitersystemen bleiben wegen des Neutralleiters die Lastspannungen symmetrisch (Abb. 23). Die Lastströme

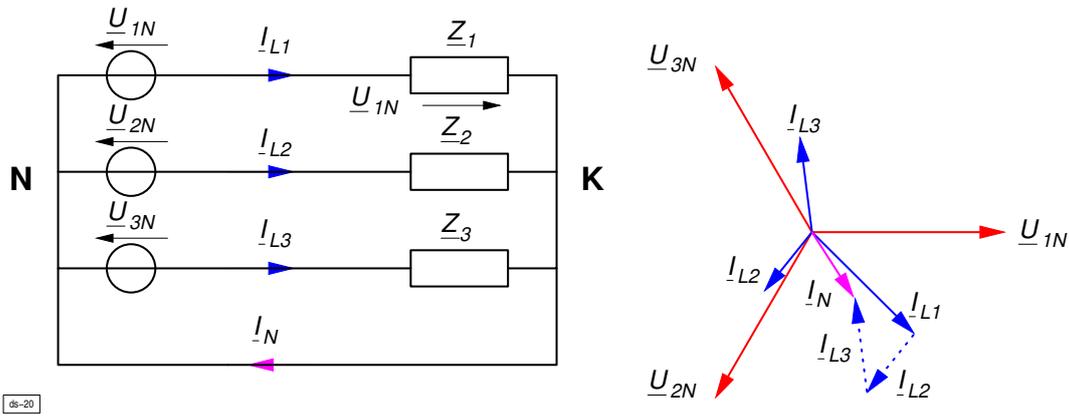


Abb. 23: Vierleiternetz mit unsymmetrischer Belastung

sind aber unsymmetrisch. Dadurch entsteht ein Neutralleiterstrom:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}$$

Der Neutralleiterstrom kann in bestimmten Fällen trotz unsymmetrischer Belastung Null sein (Abb. 24, links), er kann aber auch größer als jeder Außenleiterstrom werden (Abb. 24, rechts).

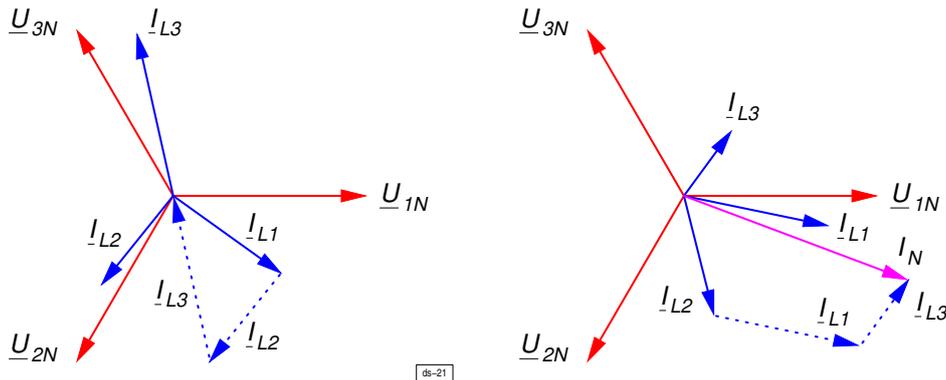


Abb. 24: Zeigerdiagramm für verschiedene unsymmetrische Belastungen

Allgemein kann nur gesagt werden:

$$|\underline{I}_N| \leq |\underline{I}_{L1}| + |\underline{I}_{L2}| + |\underline{I}_{L3}|$$

Frage: Worst Case? (Siehe Beispiel 9.2)

3.16.1 Sternschaltung ohne Neutralleiter

Fehlt der Neutralleiter, sind neben den Strömen auch die Sternpunktspannungen der Last unsymmetrisch. Zwischen den Sternpunkten der Quelle und der Last tritt eine Spannung auf, die *Sternpunktspannung* \underline{U}_{KN} (Abb. 25). Wegen des fehlenden Neutralleiters muss die Summe der

3 Drehstromsystem

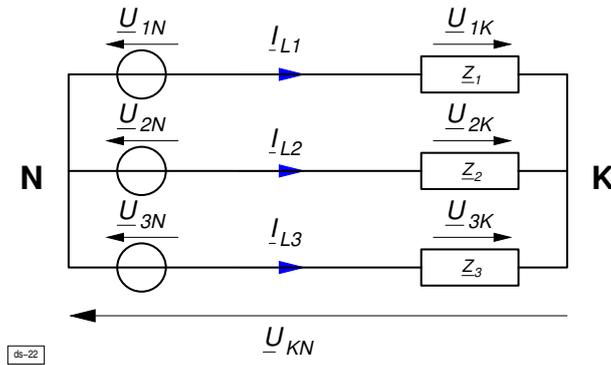


Abb. 25: Unsymmetrische Belastungen ohne Neutralleiter

Außenleiterströme Null sein:

$$\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = 0$$

Die Sternpunktspannung stellt sich so ein, dass diese Bedingung erfüllt ist. Auch bei unsymmetrischer Belastung kann die Sternpunktspannung Null sein. Dies ist in den gleichen Belastungsfällen der Fall, in denen bei vorhandenem Neutralleiter der Neutralleiterstrom Null bleibt.

Für die Sternpunktspannung ergibt sich:

$$\underline{U}_{KN} = \frac{Y_1 \underline{U}_{1N} + Y_2 \underline{U}_{2N} + Y_3 \underline{U}_{3N}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (3)$$

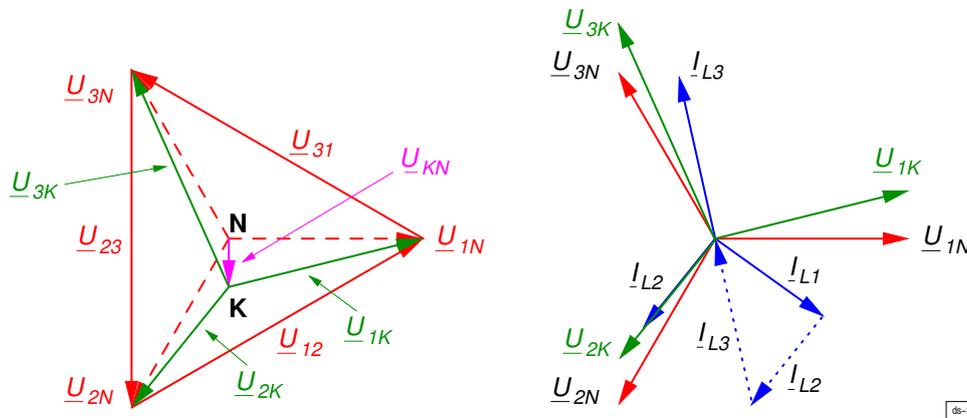


Abb. 26: Sternpunktverschiebung durch unsymmetrische Belastung

Abb. 26 zeigt die Sternpunktverschiebung \underline{U}_{KN} und die Zeigerdiagramme zu den Sternpunktspannungen der Quelle $\underline{U}_{1N}, \underline{U}_{2N}, \underline{U}_{3N}$ und der Last $\underline{U}_{1K}, \underline{U}_{2K}, \underline{U}_{3K}$ und den Leiterströmen $\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3}$, die in der geometrischen Summe Null ergeben müssen. Die Last „sieht“ nur die Außenleiterspannungen der Quelle $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$.

Die Phasenwinkel zwischen den Sternpunktspannungen an der Last betragen nicht mehr 120° .

Herleitung von Gleichung (3)

$$\underline{I}_{L1} = \underline{Y}_1 \underline{U}_{1K} \quad \underline{I}_{L2} = \underline{Y}_2 \underline{U}_{2K} \quad \underline{I}_{L3} = \underline{Y}_3 \underline{U}_{3K} \quad (4)$$

$$0 = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} \quad (5)$$

$$\underline{U}_{1K} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{KN} \quad \underline{U}_{2K} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{KN} \quad \underline{U}_{3K} = \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{KN} \quad (6)$$

Einsetzen von (4) in (5) ergibt

$$\underline{Y}_1 \underline{U}_{1K} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{2K} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{3K} = 0 \quad (7)$$

Einsetzen von (6) in (7) ergibt:

$$\underline{Y}_1 (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{KN}) + \underline{Y}_2 (\underline{U}_{2N} - \underline{U}_{KN}) + \underline{Y}_3 (\underline{U}_{3N} - \underline{U}_{KN}) = 0$$

$$\underline{Y}_1 \underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{3N} = \underline{U}_{KN} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{3N}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Durch Einsetzen von \underline{U}_{KN} in (6) erhält man die Spannungen $\underline{U}_{1K}, \underline{U}_{2K}, \underline{U}_{3K}$. Mit diesen Spannungen erhält man mit (4) die Ströme $\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3}$.

3.16.2 Dreieckschaltung

Bei Dreieckschaltungen liegen die Lastzweipole direkt an den Außenleiterspannungen der Quelle (Abb. 27). Die Lastspannungen sind also — im Gegensatz zur Dreileiter-Sternschaltung — symmetrisch.

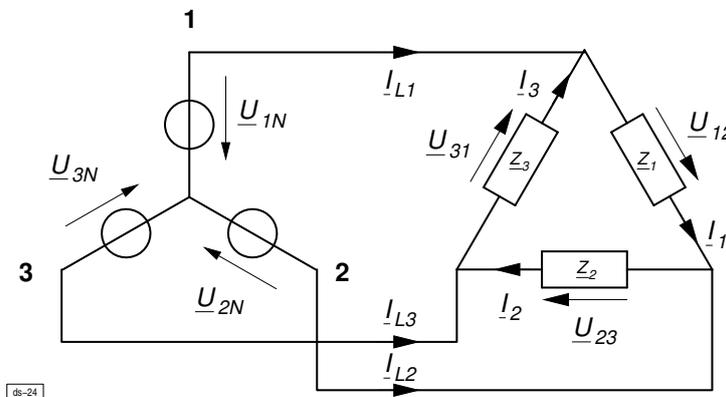


Abb. 27: Unsymmetrische Belastung in der Dreieckschaltung

Die Lastströme sind aber unsymmetrisch. Auch die Außenleiterströme sind unsymmetrisch, aber ihre Summe ist wegen des Dreileitersystems stets Null:

$$\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = 0$$

Auch bei unsymmetrischer Belastung setzen sich die Außenleiterströme aus den Lastströmen nach den Gesetzmäßigkeiten $\underline{I}_{L1} = \underline{I}_1 - \underline{I}_3$ usw. zusammen. Es gilt aber nicht: $|\underline{I}_{L1}| = \sqrt{3} |\underline{I}_1|$.

3.16.3 Leistung

Unabhängig von der Beschaffenheit und der Schaltung des Verbrauchers gibt die Quelle folgende komplexe Leistung an den Verbraucher ab (Abb. 28):

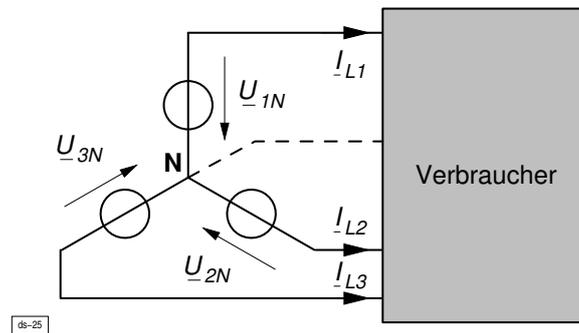


Abb. 28: Leistung bei unsymmetrischer Belastung

Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U}_{1N} \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{2N} \underline{I}_{L2}^* + \underline{U}_{3N} \underline{I}_{L3}^*$$

Wirkleistung:

$$P = U_{1N} I_{L1} \cos \varphi_1 + U_{2N} I_{L2} \cos \varphi_2 + U_{3N} I_{L3} \cos \varphi_3$$

Blindleistung:

$$Q = U_{1N} I_{L1} \sin \varphi_1 + U_{2N} I_{L2} \sin \varphi_2 + U_{3N} I_{L3} \sin \varphi_3$$

Bei unsymmetrischer Belastung muss die Gesamtleistung aus den Leistungen der einzelnen Stränge/Phasen berechnet werden. Außerdem ist bei unsymmetrischer Belastung die gesamte Augenblicksleistung $p(t)$ **zeitlich nicht konstant**.

3.17 Leistungsmessungen in Drehstromsystemen

Referenz: [1]

3.17.1 Wirkleistung

Grundsätzlich:

$$P = \Re\{\underline{S}\} = \Re\{\underline{U} \underline{I}^*\} = |\underline{U}| |\underline{I}| \cos \varphi = U I \cos \varphi = \boxed{\vec{U} \cdot \vec{I}}$$

wobei \vec{U} und \vec{I} Vektoren (Zeiger) sind und $\vec{U} \cdot \vec{I}$ ein *Skalarprodukt* bilden.

Abb. 29 zeigt die Schaltung zur Wirkleistungsmessung in einem Drehstromsystem mit und ohne zugänglichem Sternpunkt auf der Lastseite. Ist der Sternpunkt **K** nicht zugänglich, bildet man einen *künstlichen Sternpunkt K'* durch die Spannungspfade der Leistungsmesser. Die Gesamtleistung ist die Summe der gemessenen Einzelleistungen:

$$\boxed{P = \vec{U}_{1K} \cdot \vec{I}_1 + \vec{U}_{2K} \cdot \vec{I}_2 + \vec{U}_{3K} \cdot \vec{I}_3} \quad (8)$$

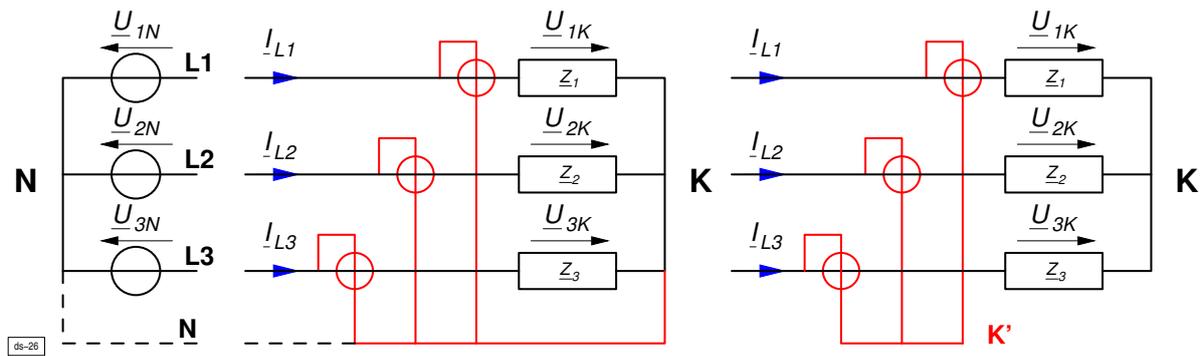


Abb. 29: Leistungsmessung

Herleitung der Gleichung (8)

Der künstliche Sternpunkt \mathbf{K}' hat das gleiche Potenzial wie der Sternpunkt \mathbf{N} der Quelle. Im Prinzip gilt das Zeigerdiagramm in Abb. 26. Die Quelle liefert die Wirkleistung

$$P = \vec{U}_{1N} \cdot \vec{I}_1 + \vec{U}_{2N} \cdot \vec{I}_2 + \vec{U}_{3N} \cdot \vec{I}_3 . \quad (9)$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{U}_{KN} \cdot \underbrace{(\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3)}_0 = 0 . \quad (10)$$

Bildet man (9) - (10) erhält man

$$\begin{aligned} P &= (\vec{U}_{1N} \cdot \vec{I}_1 - \vec{U}_{KN} \cdot \vec{I}_1) + (\vec{U}_{2N} \cdot \vec{I}_2 - \vec{U}_{KN} \cdot \vec{I}_2) + (\vec{U}_{3N} \cdot \vec{I}_3 - \vec{U}_{KN} \cdot \vec{I}_3) \\ &= (\vec{U}_{1N} - \vec{U}_{KN}) \cdot \vec{I}_1 + (\vec{U}_{2N} - \vec{U}_{KN}) \cdot \vec{I}_2 + (\vec{U}_{3N} - \vec{U}_{KN}) \cdot \vec{I}_3 . \end{aligned}$$

Aus dem Zeigerdiagramm folgt:

$$\vec{U}_{1N} - \vec{U}_{KN} = \vec{U}_{1K} \quad \vec{U}_{2N} - \vec{U}_{KN} = \vec{U}_{2K} \quad \vec{U}_{3N} - \vec{U}_{KN} = \vec{U}_{3K} .$$

Daraus folgt Gleichung (8), d. h. Gleichung (8) gilt auch für unsymmetrische Belastung, **aber** die Wirkleistungsmesser zeigen **nicht** die in der jeweiligen Phase umgesetzte Wirkleistung an. Es stimmt nur die **Summe**.

3.17.2 Aron-Schaltung

Die *Aron-Schaltung* (Abb. 30) hat mehrere Vorteile:

- sie kommt mit zwei Leistungsmessern aus
- sie benötigt keinen Neutralleiter
- die Belastung kann unsymmetrisch sein.

Nachteil:

- es kann nur die Gesamtleistung ermittelt werden.

Bedingung:

- Die verketteten Spannungen müssen ein gleichseitiges Dreieck bilden (Symmetriebedingung).

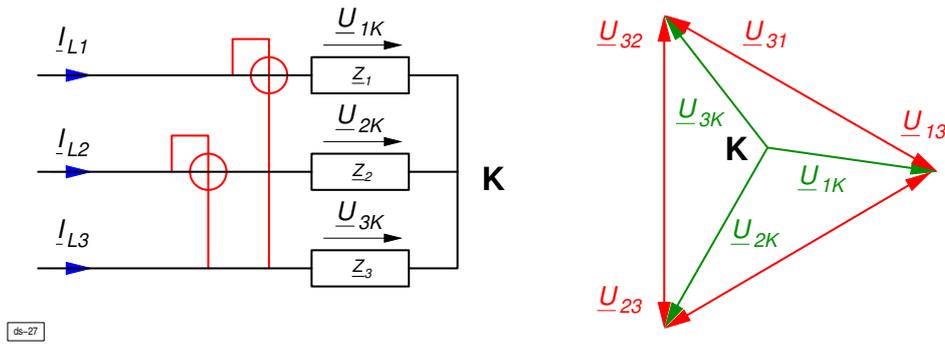


Abb. 30: Aron-Schaltung mit Zeigerdiagramm

Herleitung

$$\vec{I}_3 = -\vec{I}_1 - \vec{I}_2 \tag{11}$$

(11) in (8) einsetzen:

$$P = \vec{U}_{1K} \cdot \vec{I}_1 + \vec{U}_{2K} \cdot \vec{I}_2 - \vec{U}_{3K} \cdot \vec{I}_1 - \vec{U}_{3K} \cdot \vec{I}_2 = (\vec{U}_{1K} - \vec{U}_{3K}) \cdot \vec{I}_1 + (\vec{U}_{2K} - \vec{U}_{3K}) \cdot \vec{I}_2$$

Ersetzt man entsprechend dem Zeigerdiagramm in Abb. 30

$$\vec{U}_{1K} - \vec{U}_{3K} = -\vec{U}_{31} = \vec{U}_{13}$$

$$\vec{U}_{2K} - \vec{U}_{3K} = \vec{U}_{23}$$

ergibt sich schließlich

$$P = \vec{U}_{13} \cdot \vec{I}_1 + \vec{U}_{23} \cdot \vec{I}_2 \tag{12}$$

Die Indizes der Spannungen in Gleichung (12) deuten darauf hin, dass beim Anschluss der Leistungsmesser auf die richtige Polarität geachtet werden muss. Dazu tragen die Leistungsmesser die Klemmenbezeichnungen U, U*, I, I*.

Je nach Leistungsfaktor kann einer der beiden Leistungsanzeigen negativ werden. Die Gesamtleistung ergibt sich aus der vorzeichenrichtigen Addition der beiden Einzelleistungen. Anhand der Anzeigen der beiden *Wattmeter*¹⁰ α_1 und α_2 kann man Aussagen über den Gesamtleistungsfaktor bzw. die Phasenverschiebung φ machen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \text{positiv: } \varphi = 0^\circ$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2: \varphi = \pm 90^\circ$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \text{ positiv: } 0^\circ < \varphi < 60^\circ$$

$$\alpha_1 \text{ oder } \alpha_2 \text{ negativ: } 60^\circ < \varphi < 90^\circ$$

Damit lässt sich auch der korrekte Anschluss (Polarität) der Wattmeter überprüfen.

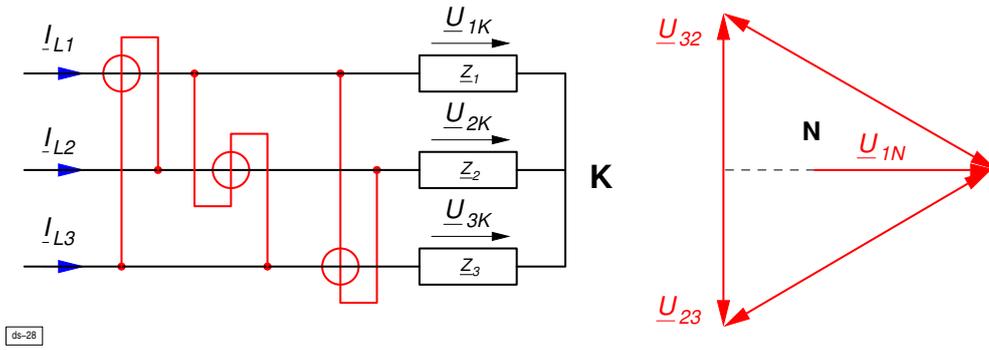


Abb. 31: Messen der Blindleistung in einem Drehstromsystem

3.17.3 Blindleistung

Zur Messung der Blindleistung wird eine Spannung benötigt, die der Phasenspannung um 90° nacheilt, denn es gilt:

$$\sin \varphi = \cos (90^\circ - \varphi) .$$

Während man bei einphasigen Systemen besondere Phasenschieberschaltungen verwendet, kann man in einem Drehstromsystem darauf verzichten. Abb. 31 zeigt das Zeigerdiagramm mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Spannungen $\vec{U}_{1N} \perp \vec{U}_{32}$ und die dazugehörige Schaltung. Beim Ablesen muss man berücksichtigen, dass z. B. $\vec{U}_{23} = \sqrt{3} \vec{U}_{1N}$. Für die gesamte Blindleistung erhält man

$$Q = \frac{\vec{U}_{23}}{\sqrt{3}} \cdot \vec{I}_1 + \frac{\vec{U}_{31}}{\sqrt{3}} \cdot \vec{I}_2 + \frac{\vec{U}_{12}}{\sqrt{3}} \cdot \vec{I}_3 . \quad (13)$$

Die Gleichung (13) gilt auch für unsymmetrische Last ohne Neutralleiter.

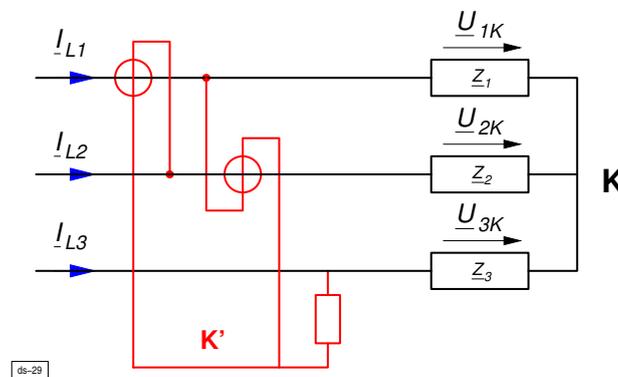


Abb. 32: Aronschaltung zur Blindleistungsmessung

Abb. 32 zeigt die Aron-Schaltung zur Erfassung der Blindleistung. Man kann zeigen, dass sich die Blindleistung ergibt aus

$$Q = \sqrt{3} (\vec{U}_{2N} \cdot \vec{I}_1 + \vec{U}_{N1} \cdot \vec{I}_2) .$$

Der künstliche Sternpunkt wird aus den Pfadwiderständen der Wattmeter und einem dritten, gleich großen Widerstand gebildet.

¹⁰Wattmeter entspricht Leistungsmesser

3.18 Bewertung

Die Vorteile des Drehstromsystems

- zeitlich konstante Augenblicksleistung
- geringer Übertragungsaufwand
- etc.

gehen mit zunehmender Unsymmetrie (sog. *Schieflast*) mehr und mehr verloren.

Besonders ungünstig verhält sich die Sternschaltung ohne Neutralleiter, da sich bei dieser Schaltung bei Schieflast die Verbraucherspannungen ändern.

Die Energieversorgungsunternehmen (EVU) achten sorgfältig auf die Symmetrie ihrer Drehstromnetze. Schieflast kommt außerhalb des Haushaltsbereiches praktisch nur bei Fehlern im Netz vor.

Das Drehstromsystem „lebt“ von seiner Symmetrie.

3.19 Andere Mehrphasensysteme

Man kann auch Mehrphasensysteme mit anderen Phasenzahlen als drei erzeugen. Diese werden in Verbindung mit Leistungselektronik gelegentlich verwendet.

Frequenz und Amplitude der Phasen sind auch in diesen Fällen gleich. Die Phasenverschiebung ist bei der Phasenzahl m dann $360^\circ/m$. Zeitlich ist dies T/m .

Abbildung 33 zeigt ein typisches Zweiphasensystem. Ein solches System lässt sich z. B. mit Hilfe eines Einphasentransformators erzeugen, dessen Sekundärwicklung eine Mittelanzapfung besitzt.

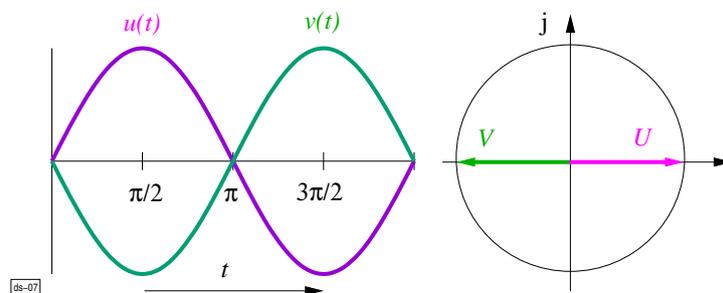


Abb. 33: Zweiphasensystem, dargestellt im Zeit- und Zeigerdiagramm

3.20 Historisches: Wieso 220 V bzw. 230 V?

Zu den ersten elektrischen Anwendungen der weltweiten Elektrifizierung (ab etwa 1880) gehörten Beleuchtungen und Antriebe. Als Lichtquellen kamen vorwiegend *Kohlebogenlampen* und *Kohlenfadenlampen* zur Anwendung. Die Stromversorgung erfolgte aus einem Gleichstromnetz. Die Kohlenfadenlampe benötigte eine Betriebsspannung von ca. 100 V, ein Kohlelichtbogen benötigt etwa 55 V, um ein gleichmäßiges und flackerfreies Licht zu erzeugen.

Für die Stromversorgung verwendete man ein *Gleichstrom-Dreileiternetz*, zum Ausgleich des Spannungsabfalls mit -110 V, +110 V Außenleiterspannungen und einem auf 0 V (Erddpotential) liegenden Mittelleiter, sodass zwischen den Außenleitern auch eine Spannung von 220 V zur Speisung größerer Verbraucher zur Verfügung stand.

Mit Umstellung auf Wechselstrom (*Einphasen-Dreileiternetz*) wurden vorwiegend in Nordamerika/UK die Netzspannungen von 110/220 V auf 120/240 V erhöht, während z. B. Europa vorwiegend das 220 V Netz beibehielt. Im Rahmen der *Harmonisierung* wurde ab 1987 die Netzspannung in Europa im Laufe mehrerer Jahre von 220 V auf 230 V erhöht bzw. von 240 V auf 230 V verringert.

4 Symmetrische Komponenten

Referenz: [2, 3, 4, 5, 6]

4.1 Problem

In den Drehstromnetzen der Energieversorger kommen auch unsymmetrische Betriebszustände vor. Dies können unsymmetrische Belastungen sein (sog. Schiefast) oder Fehlerfälle (z.B. Kurzschluss zwischen zwei Phasen). Die Ströme und Spannungen in diesen Fällen kann man natürlich „zu Fuß“ berechnen. Dies hat aber folgende Nachteile:

- Die Rechnung ist aufwändig, da ein Gleichungssystem mit vielen Unbekannten zu lösen ist.
- Das Ergebnis der Rechnung ist wenig erhellend. Man erhält nur die komplexen Werte der Spannungen und Ströme der drei Phasen. Die Struktur der Unsymmetrie erschließt sich aber kaum. Fragen der Art „Wie schief ist eigentlich die Schiefast?“ lassen sich so kaum quantitativ beantworten.

4.2 Alternative

Man probiert, die unsymmetrischen Größen aus einem symmetrischen System und Fehlergrößen, die die Unsymmetrie erzeugen, zusammensetzen. Es zeigt sich, dass dies mit Hilfe von zwei Fehlergrößen funktioniert, die selbst wieder symmetrisch und außerdem anschaulich sind. So erhält man eine Darstellung, die leichter zu rechnen und anschaulicher und aussagekräftiger ist.

4.3 Mitsystem

Das Mitsystem ist das „normale“ symmetrische Dreiphasensystem. Die Phase V eilt der Phase U um 120° nach, die Phase W um 240° (positive Phasenfolge, Abb. 34).

Mathematische Formulierung:

$$\underline{U}_U = \underline{U}_m$$

$$\underline{U}_V = \underline{a}^2 \underline{U}_m$$

$$\underline{U}_W = \underline{a} \underline{U}_m$$

Der Raumzeiger bewegt sich auf einer mathematisch positiven, also linksdrehenden Kreisbahn.

4.4 Gegensystem

Das Gegensystem ist ein symmetrisches Dreiphasensystem mit umgekehrter Phasenfolge (siehe Abb. 35). Die Phase V eilt der Phase U um 120° vor, die Phase W um 240° (negative Phasenfolge).

Mathematische Formulierung:

$$\underline{U}_U = \underline{U}_g$$

$$\underline{U}_V = \underline{a} \underline{U}_g$$

$$\underline{U}_W = \underline{a}^2 \underline{U}_g$$

Die Voreilung um 120° ist identisch mit einer Nacheilung um 240° . Der Raumzeiger bewegt sich auf einer mathematisch negativen, also rechtsdrehenden Kreisbahn.

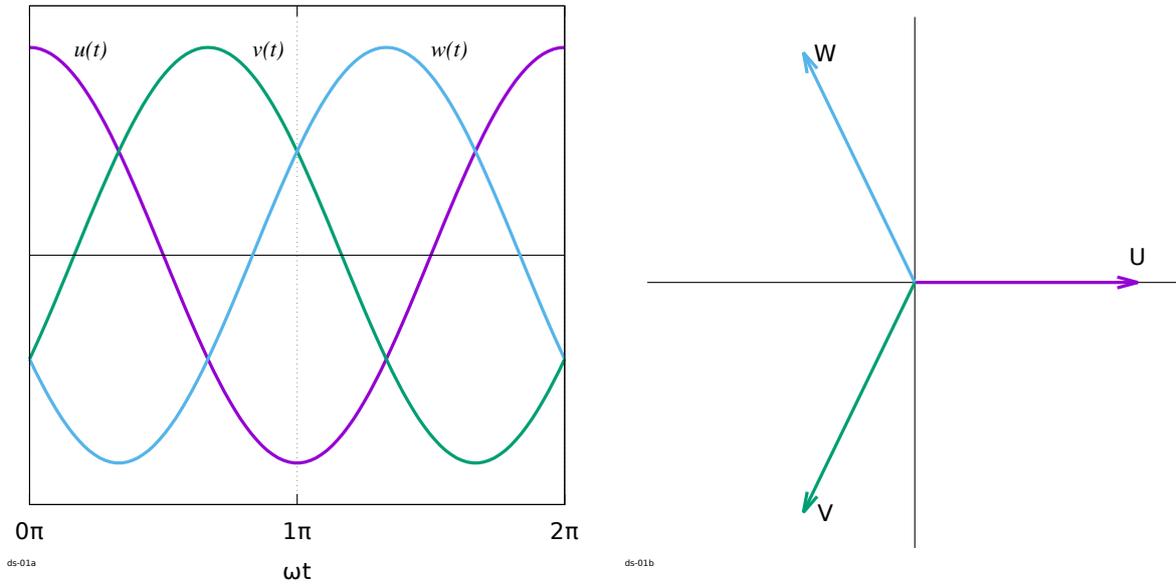


Abb. 34: Zeitverlauf und Raumzeiger beim Mitsystem

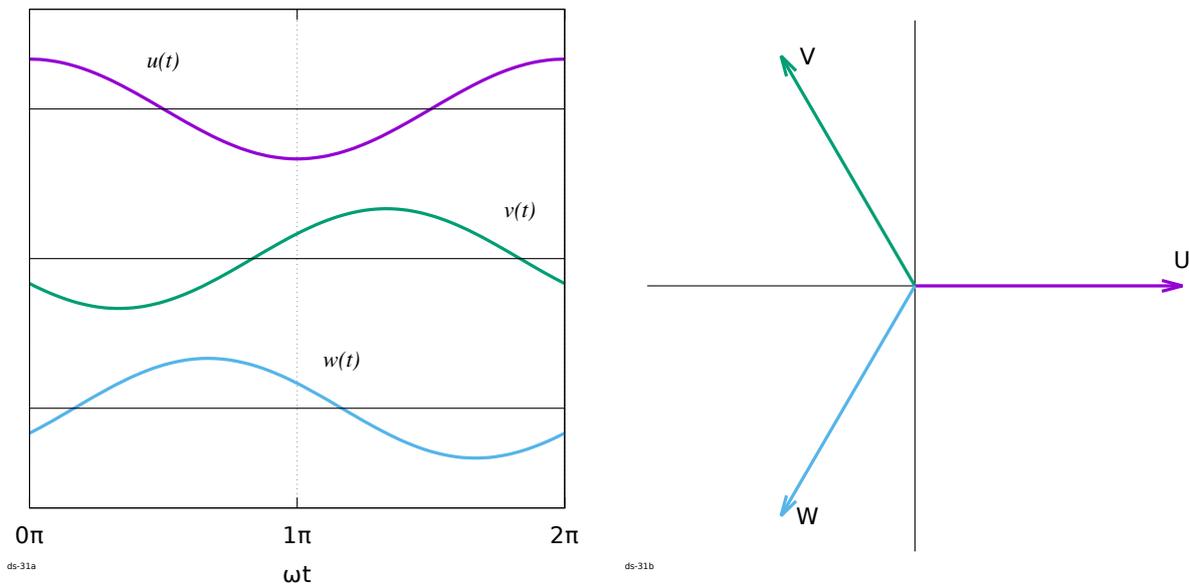


Abb. 35: Zeitverlauf und Raumzeiger beim Gegensystem

4.5 Nullsystem

Das Nullsystem ist ein gleichphasiges Dreiphasensystem (Abb. 36, hier bei einer angenommenen Phasenlage von 0°). Die Phasen U, V und W sind identisch. Eine Phasenverschiebung *zwischen den Phasen* gibt es nicht.

Mathematische Formulierung:

$$\underline{U}_U = \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_V = \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_W = \underline{U}_0$$

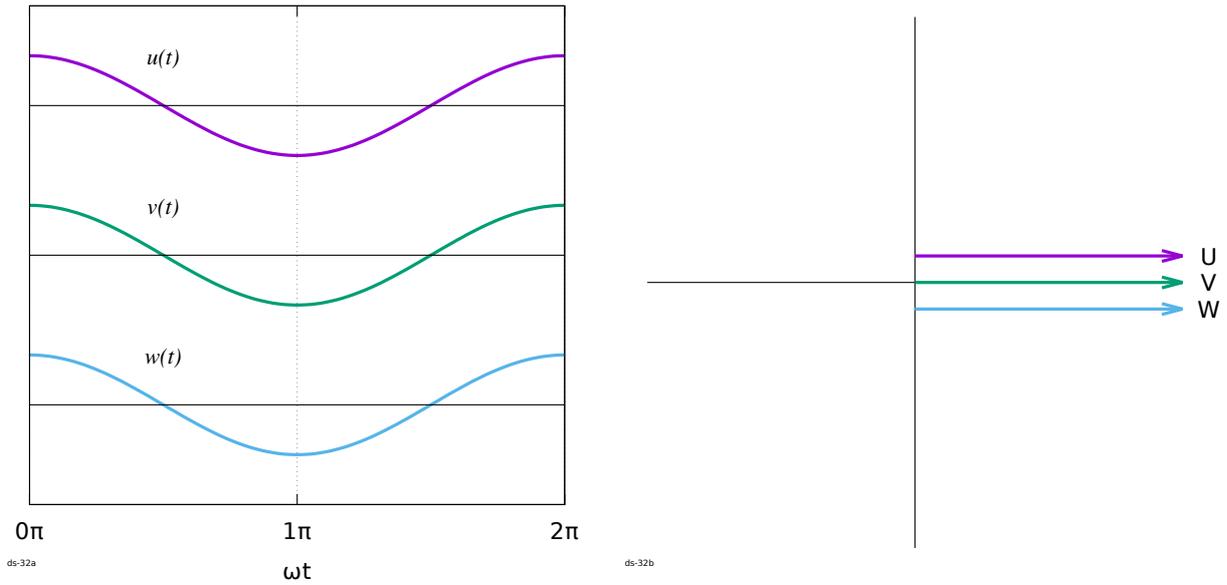


Abb. 36: Zeitverlauf und Raumzeiger beim Nullsystem (Phasenlage 0°)

Der Raumzeiger des Nullsystems verschwindet. Er hat die Länge Null und ist damit nur ein Punkt.

4.6 Zerlegung eines unsymmetrischen Systems in symmetrische Komponenten

Jedes unsymmetrische Dreiphasensystem kann man in eine Summe aus einem Mitsystem, einem Gegensystem und einem Nullsystem aufspalten.

Dies soll im Folgenden an einem System in Sternschaltung mit Neutralleiter demonstriert werden. Die Spannungen sind symmetrisch, die drei Strangströme werden als in Betrag und Phase beliebig unsymmetrisch angenommen. Ein Neutralleiterstrom ist damit im allgemeinen vorhanden (Abb. 37, links).

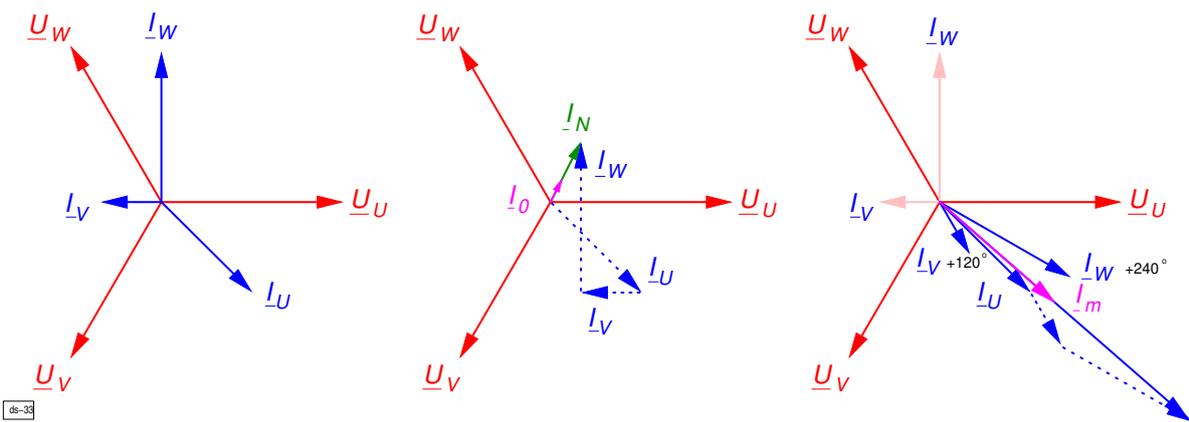


Abb. 37: Zerlegung in symmetrische Komponenten

4.7 Berechnung der Nullkomponente

Die Nullkomponente ist der Mittelwert der drei komplexen Phasengrößen unter Berücksichtigung der absoluten Winkellagen.

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} (\underline{I}_U + \underline{I}_V + \underline{I}_W)$$

In einer Sternschaltung mit Neutralleiter ist der Nullstrom damit ein Drittel des Neutralleiterstroms. Jede Phase trägt mit ihrem Nullstrom ein Drittel zum Neutralleiterstrom bei (siehe Abb. 37, Mitte).

4.8 Berechnung der Mitkomponente

Die Mitkomponente ist ebenfalls ein Mittelwert der drei komplexen Phasengrößen. Dabei werden jedoch die regulären Winkellagen herausgerechnet, indem die Größe der Phase V um $+120^\circ$ und die Größe der Phase W um $+240^\circ$ verdreht werden. Übrig bleiben dann nur noch die Differenzwinkel zur regulären Winkellage jeder Phase (siehe Abb. 37, rechts). Das Ergebnis ist die Mitkomponente der Phase U.

$$\underline{I}_{mu} = \frac{1}{3} (\underline{I}_U + \underline{a} \underline{I}_V + \underline{a}^2 \underline{I}_W) = \underline{I}_m$$

Die Mitkomponenten der anderen Phasen ergeben sich durch Verdrehung von \underline{I}_{mu} um -120° bzw. -240° , also:

$$\underline{I}_{mu} = \underline{I}_m \quad \underline{I}_{mv} = \underline{a}^2 \underline{I}_m \quad \underline{I}_{mw} = \underline{a} \underline{I}_m$$

4.9 Berechnung der Gegenkomponente

Wenn man nun in jeder Phase von der Größe des ursprünglichen, unsymmetrischen Systems die bereits berechneten Mit- und Nullkomponenten abzieht, bleibt in jeder Phase ein Rest übrig. Die Reste der drei Phasen bilden dabei ein reines Gegensystem. Der Rest der Phase U ergibt sich als:

$$\underline{I}_{gu} = \frac{1}{3} (\underline{I}_U + \underline{a}^2 \underline{I}_V + \underline{a} \underline{I}_W) = \underline{I}_g$$

Dies ist die Gegenkomponente der Phase U.

Die Gegenkomponenten der anderen Phasen ergeben sich durch Verdrehung von \underline{I}_{gu} um $+120^\circ$ bzw. $+240^\circ$, also:

$$\underline{I}_{gu} = \underline{I}_g \quad \underline{I}_{gv} = \underline{a} \underline{I}_g \quad \underline{I}_{gw} = \underline{a}^2 \underline{I}_g$$

Die mathematischen Strukturen der Formeln für die Gegenkomponente \underline{I}_g und die Mitkomponente \underline{I}_m sind weitgehend gleich. Die Größen der Phasen V und W werden lediglich jeweils in entgegengesetzter Richtung verdreht.

Fazit: Jedes unsymmetrische Dreiphasensystem lässt sich auf die dargestellte Weise vollständig in eine Summe aus einem Mit-, Gegen- und Nullsystem zerlegen, ohne dass ein Rest übrig bleibt.

4.10 Berechnung der Phasengrößen aus den symmetrischen Komponenten

Man kann auch sehr leicht die originalen Phasengrößen aus den symmetrischen Komponenten zusammensetzen. Dazu muss man nur die drei Komponenten jeder Phase addieren.

$$\underline{I}_U = \underline{I}_0 + \underline{I}_{mu} + \underline{I}_{gu}$$

$$\underline{I}_V = \underline{I}_0 + \underline{I}_{mv} + \underline{I}_{gv}$$

$$\underline{I}_W = \underline{I}_0 + \underline{I}_{mw} + \underline{I}_{gw}$$

Durch Einsetzen wird daraus:

$$\underline{I}_U = \underline{I}_0 + \underline{I}_m + \underline{I}_g$$

$$\underline{I}_V = \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_m + \underline{a} \underline{I}_g$$

$$\underline{I}_W = \underline{I}_0 + \underline{a} \underline{I}_m + \underline{a}^2 \underline{I}_g .$$

5 Raumzeiger

5.1 Idee

Den Rechengang zur Ermittlung des magnetischen Flußdichtevektors aus den drei Strangströmen einer Drehfeldwicklung kann man formal auch auf andere Größen anwenden.

- Man tut so, als ob man aus Spannungen, Strömen usw. magnetische Feldvektoren berechnen würde.
- Damit erhält man künstliche Vektoren, die mit dem magnetischen Drehfeld synchron mitrotieren.
- Die magnetischen Feldvektoren und die so gewonnenen künstlichen Vektoren sind zweidimensional. Daher kann man sie auch als komplexe Größen darstellen.

5.2 Erzeugung eines Raumzeigers

1. In einer Drehfeldwicklung mit m Strängen werden die Momentanwerte der m Stränge komplex addiert. Dabei erhält jeder (reelle) Momentanwert den räumlichen Lagewinkel „seiner“ Strangspule (Abb. 38 links).
2. Die dabei entstandene komplexe Größe wird anschließend durch einen skalaren Vorfaktor normiert. Da die Raumzeiger künstliche mathematische Gebilde ohne direkte physikalische Bedeutung sind, kann man die Normierung frei verabreden. Bei drei Phasen ist der günstigste Vorfaktor $2/3$.

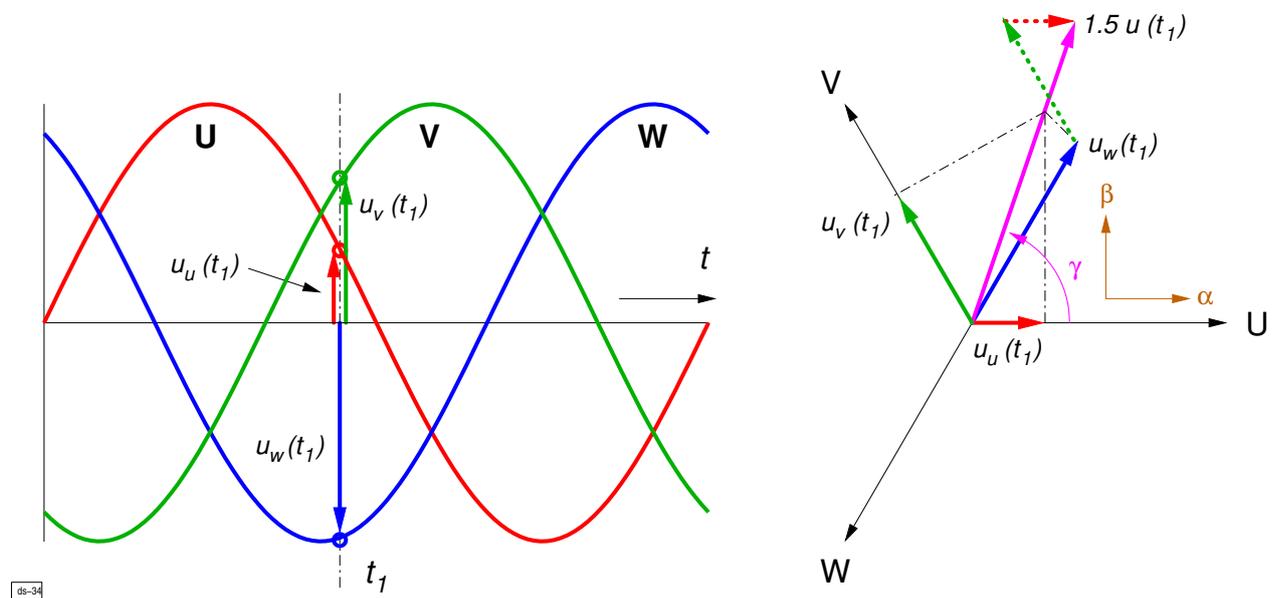


Abb. 38: Konstruktion des Raumzeigers aus den Phasengrößen

5.3 Mathematische Formulierung

Ein Spannungs-Raumzeiger eines dreisträngigen Systems ergibt sich nach den dargestellten Regeln als

$$\underline{u}(t) = \frac{2}{3} \left(u_u(t) + u_v(t) e^{j120^\circ} + u_w(t) e^{j240^\circ} \right)$$

Der Winkel γ eines Raumzeigers hat — anders als in der üblichen komplexen Wechselstromrechnung — eine räumliche Bedeutung. Die reelle Achse ist die Bezugsachse des Raumzeigers, die imaginäre Achse die Senkrechte darauf (Abb. 38 rechts).

Ist der Raumzeiger $\underline{u}(t)$ an der γ -Achse einer Drehfeldwicklung orientiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= |u| e^{j\gamma} = u_\alpha(t) + j u_\beta(t) \\ &= \frac{2}{3} \left[u_u(t) + u_v(t) \cos(120^\circ) + u_w(t) \cos(240^\circ) + j \{ u_v(t) \sin(120^\circ) + u_w(t) \sin(240^\circ) \} \right] \end{aligned}$$

Wenn man die Zahlenwerte der Winkelfunktionen einsetzt, erhält man für die Komponenten

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= \frac{2}{3} \left[u_u(t) - \frac{1}{2} u_v(t) - \frac{1}{2} u_w(t) \right] \\ u_\beta(t) &= \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} u_v(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} u_w(t) \right] \end{aligned}$$

5.4 Graphische Veranschaulichung

Wenn man von der Spitze des Raumzeigers Lote auf die Spulenachsen fällt, erhält man die Werte der Stranggrößen (Abb. 38 rechts). Das bewirkt der Normierungsfaktor $2/3$. Das gilt aber nur, wenn kein Nullsystem vorhanden ist.

☞ Ein Raumzeiger enthält also die komplette Information über die Stranggrößen — allerdings ohne die Nullsysteme.

5.5 Raumzeiger und Nullsysteme

Die Nullkomponenten eines Mehrphasensystems sind in allen Phasen zu jedem Zeitpunkt gleich.

$$u_{U0}(t) = u_{V0}(t) = u_{W0}(t) = u_0(t)$$

Damit wird der Spannungsraumzeiger eines beliebigen Nullsystems:

$$\begin{aligned} \underline{u}_0(t) &= \frac{2}{3} \left(u_0(t) + u_0(t) e^{j120^\circ} + u_0(t) e^{j240^\circ} \right) \\ &= \frac{2}{3} u_0(t) (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) = 0 \end{aligned}$$

Nullanteile fallen also bei der Berechnung eines Raumzeigers heraus (Abb. 39).

☞ Raumzeiger enthalten keine Informationen über Nullsysteme.

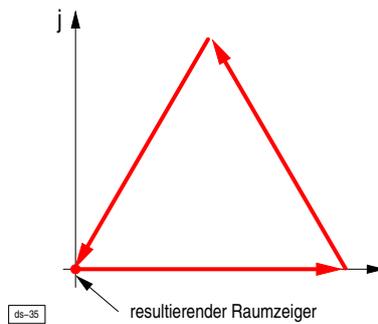


Abb. 39: Raumzeiger des Nullsystems

5.6 Raumzeiger und Leistung

Welcher quantitative Zusammenhang besteht zwischen den Raumzeigern und der Leistung im Dreiphasensystem?

Dies soll am Beispiel eines symmetrischen Drehstromsystems untersucht werden. Die Spannungen und Ströme der drei Phasen des Systems sind zu Raumzeigern zusammengefasst.

Die formale Anwendung der Rechenregel für die komplexe Leistung liefert für die Raumzeiger

$$\underline{S}' = \underline{u} \underline{i}^* = |\underline{u}| |\underline{i}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \hat{U} \hat{I} \cos \varphi + j \sin \varphi = 2 U I (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

In Wirklichkeit ist aber $\underline{S} = 3 U I (\cos \varphi + j \sin \varphi)$. Also gilt für die Leistung bei Raumzeigerdarstellung

$$\underline{S} = \frac{3}{2} \underline{u} \underline{i}^*.$$

5.7 Raumzeiger der Flussdichteverteilung

Abb. 40 zeigt die Feldverteilung in einer Polteilung einer Drehstrommaschine hervorgerufen durch eine dreiphasige Wicklung zu einem bestimmten Zeitpunkt t . Die Einzel(wechsel)flüsse der jeweiligen Phasenströme bilden zusammen **einen** gerichteten Fluss, dem man einen Feldvektor \vec{B} zuordnen kann und der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

Grundsätzlich gilt für ein Feldlinienbild: die Stärke (Länge) eines Feldvektors ist umgekehrt proportional zum Feldlinienabstand, seine Richtung ergibt sich aus der Lage der Tangenten an die Feldlinien¹¹.

Man legt den Feldvektor in das positive Maximum. **Das entspricht der Cosinusfunktion an der Stelle 0°.** Aus dem Feldlinienbild in Abb. 40 lässt sich das Maximum nur schätzen. Mehr Aufschluss liefert die quantitative Auswertung des Luftspaltfeldes. Abb. 41 zeigt den treppenförmigen Verlauf der magnetischen Flussdichte im Luftspalt über den gesamten Umfang der Maschine. Zwischen den Nuten sind die Flussdichten ziemlich konstant, da auch der Luftspalt konstant ist. Man erkennt das auch an der Dichte der Feldlinien im Luftspalt. Jede Nut stellt eine Luftspalterweiterung dar, die einen Einbruch der Flussdichte zur Folge hat. Gleichzeitig bewirkt der Strom in der Nut nach dem *Durchflutungssatz* eine Änderung der Flussdichte ($\oint \vec{H} \, d\vec{s} = I$).

¹¹Das Vorzeichen lässt sich aus dem Feldlinienbild nicht erkennen.

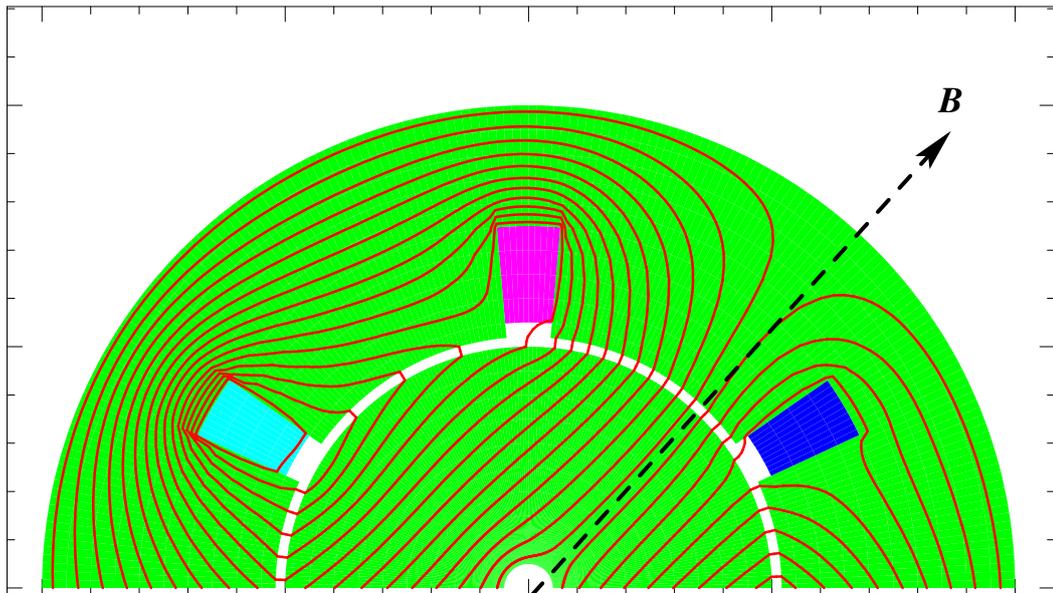


Abb. 40: Feldverteilung in einer sehr einfachen Drehstrommaschine

Auch aus dem Verlauf der Luftspaltinduktion ist das Maximum und damit die Lage des Raumzeigers von B nicht einfach zu ermitteln. Endgültige Klarheit bringt eine harmonische Analyse (Fourieranalyse) der Luftspaltinduktion im Luftspalt. Aus den Koeffizienten a_1, b_1 für die Grundschwingung erhält man das Maximum $\hat{B} = 0.252 \text{ T}$ bei einem Winkel von ziemlich genau 45° (Abb. 41).

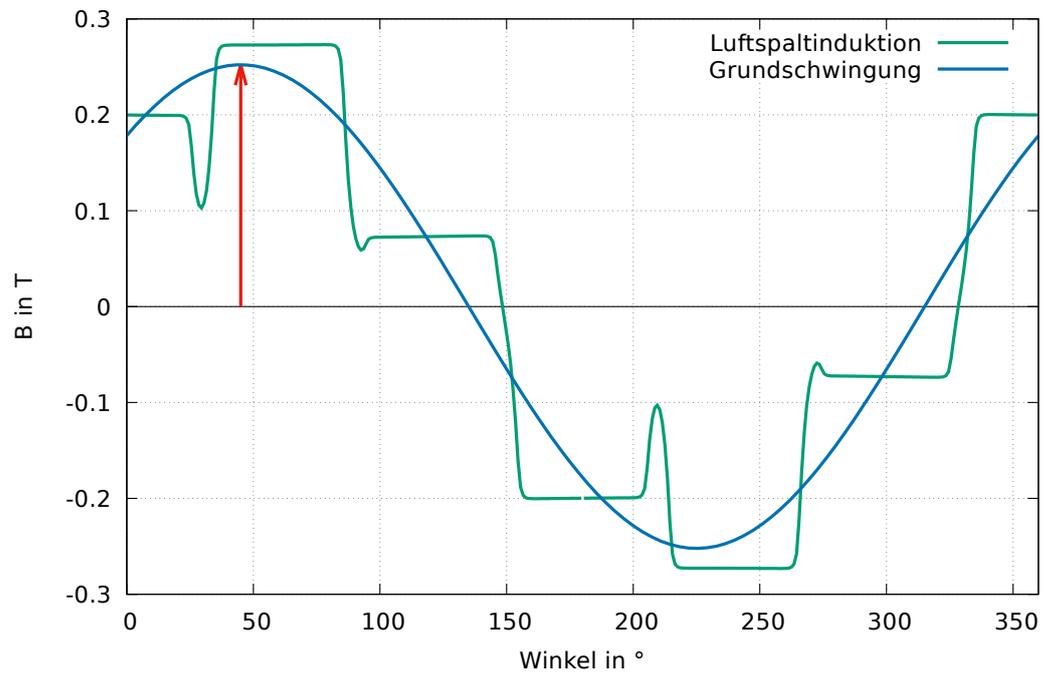


Abb. 41: Flussdichteverteilung im Luftspalt, Grundschiwingung aus harmonischer Analyse

6 Transformator

6.1 Prinzipieller Aufbau und Zweck

Ein Transformator entsteht, wenn ein zeitlich veränderlicher Magnetfluss zwei (oder mehr) Stromkreise miteinander verbindet (koppelt). Während man in der Nachrichtentechnik Transformatoren im allg. als *Übertrager* bezeichnet und sie in erster Linie dazu verwendet, Signale/-Informationen zu übertragen, dienen Transformatoren in der Energietechnik zum Übertragen elektrischer Energie. Entscheidend ist die Art der Kopplung zwischen den Stromkreisen. In der elektrischen Energietechnik strebt man eine möglichst 100-prozentige Kopplung zwischen den Stromkreisen an. Dazu bildet man die Stromkreise als Spulen/Wicklungen aus und verwendet zur Führung des magnetischen Flusses Eisenkerne.

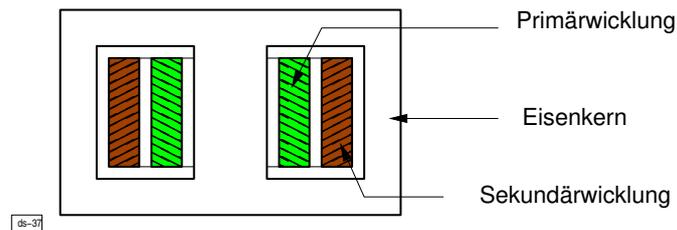


Abb. 42: Aufbau eines Manteltransformators

Abb. 42 zeigt ein sogenannten *Manteltransformator*, bei dem zur maximalen Kopplung die beiden Wicklungen (*Primär-, Sekundärwicklung*) übereinander gewickelt sind und beidseitig von einem Eisenkern umschlossen werden.

Neben der fast verlustlosen Energieübertragung zwischen Stromkreisen (Netzen) lassen sich durch die Windungszahlen der Wicklungen Transformatoren an unterschiedliche Spannungen und Ströme anpassen. Wegen der voneinander isolierten Wicklungen erlauben Transformatoren ebenfalls eine galvanische Trennung zwischen Stromkreisen bzw. Netzen.

6.2 Idealer Transformator

Zum Verständnis der Wirkungsweise betrachtet man zuerst einen Transformator mit folgenden Eigenschaften (*idealer Transformator*):

- die Wicklungen haben keinen ohmschen Widerstand;
- der magnetische Fluss verbindet beide Wicklungen zu 100 %, d. h. es gibt keinen *Streufloss*;
- die Permeabilität des Eisen ist unendlich groß, d. h. der magnetische Widerstand ist Null ($\mu_r \rightarrow \infty$);
- es treten keine Verluste im Eisen auf.

Legt man an die *Primärwicklung* eines idealen Transformators mit der Windungszahl N_1 eine Wechselspannung U_1 an, bildet sich ein Fluss Φ_h aus (siehe Abb. 43). Das Induktionsgesetz

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (14)$$

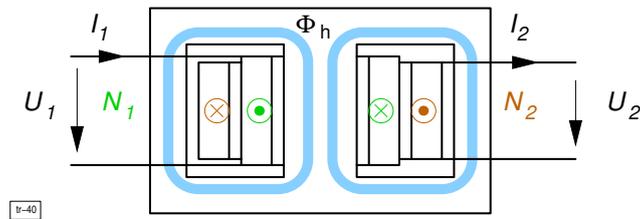


Abb. 43: Grundgleichungen des idealen Transformators

beschreibt den Zusammenhang zwischen U_1 , Φ_h und N_1 . Danach hängt U_1 bei gleichem N_1 direkt von Φ_h ab **und umgekehrt**.

Der gleiche Fluss Φ_h , idealer Transformator vorausgesetzt, durchsetzt auch die *Sekundärwicklung* und induziert analog zu Gleichung (14) in ihr die Spannung

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_h}{dt} . \quad (15)$$

Bildet man den Quotient aus den Gleichungen (14) und (15) erhält man bei sinusförmiger Spannung und konstanter Frequenz

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}} . \quad (\text{idealer Transformator}) \quad (16)$$

Man bezeichnet dieses Verhältnis als *Übersetzungsverhältnis* \ddot{u} .

Dem Transformator ist es egal, auf welcher Seite die Spannung eingespeist wird, Gleichung (16) stellt nur eine Beziehung zwischen den Windungszahlen und den dazugehörigen Spannungen her. Aus diesem Grund ist die Bezeichnung Primär- und Sekundärwicklung willkürlich. *Als Primärwicklung bezeichnet man die Wicklung, die den Magnetisierungsstrom liefert* (Abschnitt [Magnetisierungsstrom](#)). In der Praxis verwendet man zur eindeutigen Identifikation der Wicklungen die Begriffe Ober- (OS) und Unterspannungswicklung (US). Ebenso wird das Übersetzungsverhältnis immer als ungekürztes Verhältnis U_{OS}/U_{US} angegeben und ist demnach immer größer oder gleich eins.

Das Induktionsgesetz sagt nichts über den Strom aus, der notwendig ist, den Fluss Φ_h zu erzeugen. Diese Information liefert aber das Durchflutungsgesetz

$$\Theta = N I = \oint \vec{H} \, d\vec{s} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \, d\vec{s} = \oint \frac{\Phi_h / \vec{A}}{\mu_0 \mu_r} \, d\vec{s} . \quad (17)$$

Für den idealen Transformator verschwindet der magnetische Widerstand des Eisens und wegen $\mu_r \rightarrow \infty$ folgt entsprechend Gleichung (17), dass beim idealen Transformator **kein** Strom benötigt wird, um den Fluss Φ_h zu erzeugen.

Ein ähnliches Phänomen stellt sich in einem elektrischen Stromkreis ein. Wird der Gesamtwiderstand des Kreises Null, ist **keine** Spannung notwendig, um einen Strom in dem Kreis aufrecht zu erhalten. Das ist das Prinzip der *Supraleitung*. Für den magnetischen Kreis gibt es jedoch keine Supraleitung.

Belastet man den leerlaufenden, idealen Transformator ($I_1 = 0$) auf der Sekundärseite, wird sich entsprechend der Last nach dem Ohmschen Gesetz ein Strom I_2 einstellen (Abb. 44). Dieser Strom erzeugt eine Durchflutung $I_2 N_2$ in der Sekundärwicklung und damit einen eigenen

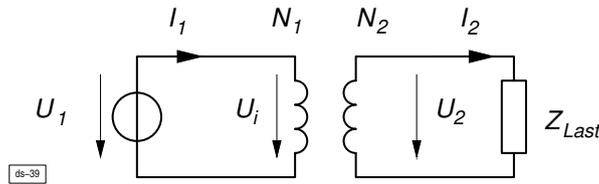


Abb. 44: Belasteter Einphasentransformator

Fluss Φ_2 , der nach der Lenzschen Regel seiner Ursache, nämlich dem Fluss Φ_h , entgegen wirken muss. Als Folge davon würde sich der Fluss $\Phi_h - \Phi_2$ einstellen und das Induktionsgesetz gemäß Gleichung (14) wäre nicht mehr erfüllt. Um das Gleichgewicht wieder herstellen zu können, nimmt die Primärwicklung einen Strom I_1 auf (vor der Belastung war $I_1 = 0$). Dieser Strom zusammen mit der Windungszahl N_1 baut eine Durchflutung $I_1 N_1$ und damit einen zusätzlichen Fluß Φ_1 auf, der genauso groß wie Φ_2 ist und die Richtung von Φ_h besitzt, d. h. Φ_1 kompensiert vollständig Φ_2 .

$$\Phi_h = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (\text{kein Streufluss}) \quad (18)$$

$$0 = N_1 I_1 - I_2 N_2 \quad (\mu_r \rightarrow \infty) \quad (19)$$

Man kann diese Stromaufnahme auch damit erklären, dass die Flussschwächung durch Φ_2 die Induktionsspannung U_i der Primärspule absenken will und auf Grund der Spannungsdifferenz $U_1 - U_i$ der Primärstrom I_1 entsteht (siehe Abb. 44).

Aus Gleichung (19) folgt letztendlich

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}} \quad (\text{idealer Transformator}) \quad (20)$$

6.3 Magnetisierungsstrom

Reale Transformatoren in der Energietechnik werden aus Eisenblechen zusammengebaut, deren magnetische Eigenschaft sich durch eine Magnetisierungskennlinie (MKL) beschreiben lässt (siehe auch Abb. 47, Seite 49). Die Kennlinie zeigt den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke H und der Flussdichte B bzw. Polarisation J .¹² Mit zunehmender Flussdichte wird die Kennlinie wegen der Sättigung flacher. Die Steigung der Kennlinie entspricht der Permeabilität μ_r ¹³ und ist umgekehrt proportional zum magnetischen Widerstand.

Obwohl Transformatoren keine rotierenden Teile besitzen und deswegen im Regelfall keinen Luftspalt brauchen, müssen die Eisenkerne aus fertigungstechnischen Gründen — u. a. um die bewickelten Spulen auf den Eisenkern zu bringen — aus einzelnen Blechen zusammengesetzt werden. Die Stoßfugen der Bleche wirken wie kleine Luftspalte.

Der endliche magnetische Widerstand des Eisenmaterials und die im magnetischen Kreis liegenden Luftspalte, die zur Verringerung der effektiven Permeabilität μ_r führen (Scherung der MKL), machen es erforderlich, die Durchflutung auf der Primärseite zu erhöhen, um den gleichen Fluss

¹²Nach DIN 1324 gilt: $J = B - \mu_0 H$.

¹³folgt aus $\mu_r \mu_0 = B/H$

halten zu können. Das bedeutet, dass nach dem Durchflutungssatz (17) ein *Magnetisierungsstrom* I_μ benötigt wird, um den erforderlichen Fluss Φ_h erzeugen zu können. Gleichung (19) muss um diesen Beitrag korrigiert werden:

$$\begin{aligned} N_1 I_\mu &= N_1 I_1 - I_2 N_2 \\ N_2 I_2 &= N_1 (I_1 - I_\mu) \\ I_1 &= \frac{N_2}{N_1} I_2 + I_\mu. \end{aligned}$$

Da der Magnetisierungsstrom im Verhältnis zum Nennstrom im Prozentbereich liegt und mit zunehmender Leistung das Verhältnis noch kleiner wird, berücksichtigt man den Magnetisierungsstrom bei der Leistungsbilanz von Transformatoren nicht extra.

6.4 Wicklungssinn

Zur Beurteilung der Polaritäten der Ein- und Ausgangsspannungen ist der Wicklungssinn der Spulen maßgebend (siehe Abb. 45). Diesen kennzeichnet man mittels der *Punktregel*: die Klemmen, die mit einem Punkt versehen sind, besitzen die gleiche Polarität.

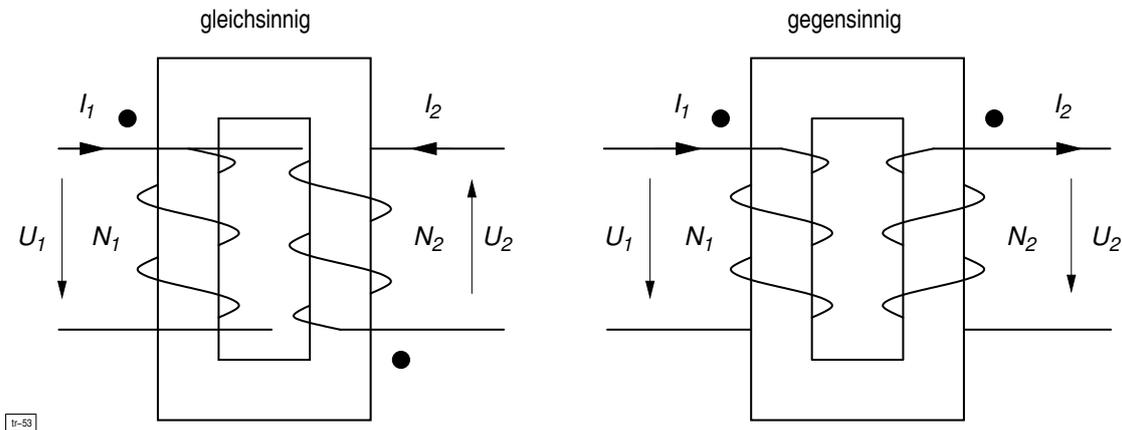


Abb. 45: Wicklungssinn

Um die Punkte einem Paar gekoppelter Spulen zuzuordnen, geht man folgendermaßen vor:

- Punkt an die Primärklemme setzen, in die der Strom i_1 hineinfließt;
- Richtung von Φ_1 bestimmen (Rechte-Hand-Regel);
- Φ_2 fließt nach der Lenzschen Regel entgegengesetzt;
- Richtung von i_2 bestimmen, der Φ_2 verursacht;
- Punkt an die Sekundärklemme setzen, an der i_2 herausfließt.

Die Polaritäten der Spannungen ergeben sich aus dem verwendeten Zählfeilsystem. Die Kennzeichnung mittels Punkte in den Schaltunterlagen findet man vorwiegend bei Übertragern. In der Energietechnik verwendet man statt dessen genormte Anschlussbezeichnungen.

6.5 Übersetzung von Impedanzen

Der Transformator wird mit einem Widerstand R_2 belastet (Abb. 46). Es gilt

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1 \ddot{u}}{I_1/\ddot{u}} = \frac{U_1}{I_1} \ddot{u}^2 = R_1 \ddot{u}^2 \quad \text{mit} \quad \ddot{u} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

Allgemein gilt:

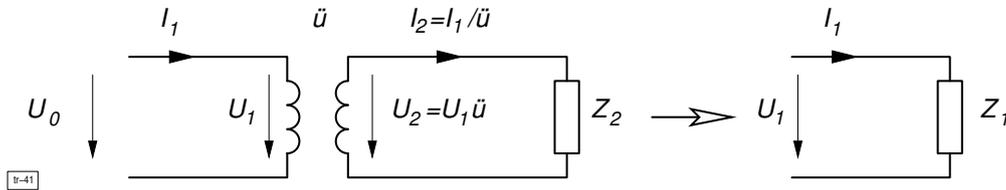


Abb. 46: Übersetzungsverhältnis von Widerständen

$$\boxed{Z_2 = Z_1 \ddot{u}^2} \quad \boxed{Z_1 = \frac{Z_2}{\ddot{u}^2}}$$

Impedanzen werden mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses \ddot{u} übersetzt.

6.6 Leistungsbilanz

6.6.1 Idealer Transformator

In einem idealen Transformator gilt

$$u_2(t) = u_1(t) \frac{N_2}{N_1} = u_1(t) \ddot{u}$$

$$i_2(t) = i_1(t) \frac{N_1}{N_2} = i_1(t) \frac{1}{\ddot{u}}$$

Damit wird dann

$$p_2(t) = u_2(t) i_2(t) = u_1(t) \ddot{u} i_1(t) \frac{1}{\ddot{u}} = u_1(t) i_1(t) = p_1(t) .$$

Die Augenblicksleistungen auf der Primär- und der Sekundärseite sind zu jedem Zeitpunkt gleich.

Zur Berechnung der Bemessungsdaten eines Einphasentransformators gilt die Beziehung

$$\boxed{S_{1N} = U_{1N} I_{1N} = S_{2N} = U_{2N} I_{2N} = S_N} ,$$

und zwar unabhängig davon, von welcher Seite der Transformator eingespeist wird. Der Magnetisierungsstrom, der zusätzlich nur in der Primärwicklung fließt, wird nicht extra berücksichtigt (siehe auch Abschnitt 6.3).

6.6.2 Verluste im realen Transformator

- Die ohmschen Widerstände der Wicklungen verursachen Verluste, deren Höhe von den Strömen in den Wicklungen abhängt (lastabhängige Verluste).
 - Die magnetische Hysterese des Kernmaterials und
 - induzierte Ströme im elektrisch leitfähigen Kern (sog. Wirbelströme)
- verursachen die sogenannten *Eisenverluste*, die von der magnetischen Aussteuerung des Kernes und damit von der anliegenden Spannung abhängen (lastunabhängige Verluste).

6.7 Hystereseverluste

Entstehung

In jeder Sinuswelle der Wechselspannung wird der ferromagnetische Kern des Trafos einmal zwischen einem negativen und einem positiven Maximalwert der Flussdichte B hin und her magnetisiert und durchläuft dabei eine Hystereseschleife.

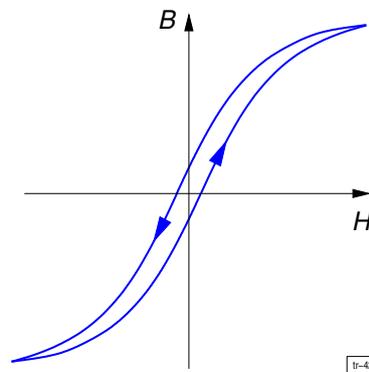


Abb. 47: Hysteresekennlinie

Die von der Schleife umschlossene Fläche ist eine Energiedichte. Diese Fläche, multipliziert mit dem Kernvolumen, ergibt eine Verlustenergie, die bei jeder Ummagnetisierung im Kern in Wärme verwandelt wird (Abb. 47).

Ferromagnetische Werkstoffe

Ferromagnetische Stoffe sind die „magnetischen“ Stoffe der Praxis. Sie ziehen das Magnetfeld stark in sich hinein und werden von Magneten deutlich angezogen. Ihre Permeabilität ist viel größer als 1. Ihre technische Bedeutung ist groß.

$$\mu_r \gg 1$$

Beispiele: Eisen: $\mu_r \approx 25000$, Ni Fe (80,16): $\mu_r \approx 130000$, Fe Co (52,48): $\mu_r \approx 1200$.

Ferromagnetische Stoffe bestehen aus kleinen, magnetischen einheitlich ausgerichteten Bereichen, den sog. *Weisschen Bezirken*. Im Grundzustand sind diese Bezirke regellos verteilt. Der Stoff wirkt unmagnetisch.

Im äußeren Magnetfeld richten sich die Weisschen Bezirke so aus, dass sie das Feld verstärken. Dies geschieht im Wesentlichen dadurch, dass die „passend magnetisierten“ Bereiche auf Kosten der „unpassenden“ Bezirke wachsen.

Nach der Ausrichtung im äußeren Feld kehren die Weisschen Bezirke nicht wieder in den regellosen Zustand zurück. Es bleibt eine Restorientierung, die zu einer verbleibenden äußeren Flussdichte, der *Remanenzflussdichte* B_r , führt¹⁴.

Um die Flussdichte B wieder auf Null zu bringen, benötigt man eine Gegenmagnetisierung, die *Koerzitivfeldstärke* H_C .

Wenn alle Weisschen Bezirke ausgerichtet sind, kann die Flussdichte B bei weiter steigender Feldstärke H kaum noch zunehmen. Das ferromagnetische Material kommt in die *Sättigung*.

Die Fläche unter der Schleife ist eine Energie. Diese Energie wird bei jedem Durchlauf der Schleife in Wärme umgewandelt (*Hystereseverluste*).

Oberhalb der sog. *Curietemperatur* ϑ_C schlägt der Ferromagnetismus in *Paramagnetismus* um. Der Vorgang ist reversibel.

Frequenzabhängigkeit

Die mittlere Hystereseverlustleistung ist proportional der Betriebsfrequenz des Trafos. Je öfter ummagnetisiert wird, desto mehr Energie wird je Zeiteinheit verheizt.

$$P_{\text{Hyst}} \sim f$$

6.8 Wirbelstromverluste

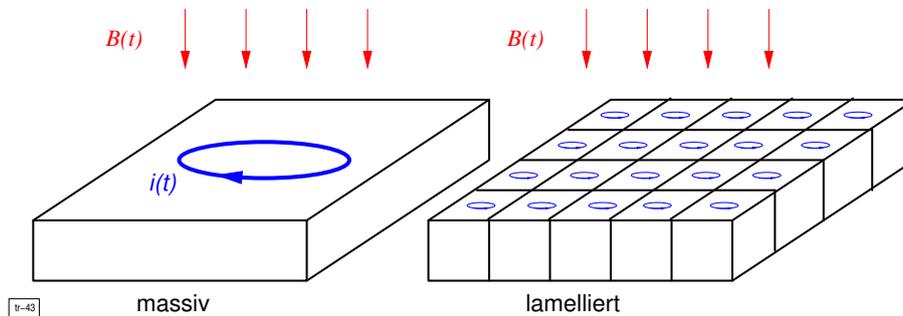


Abb. 48: Entstehung von Wirbelströmen

Entstehung

Im Magnetkern des Trafos existiert eine sich im Takt der Betriebsfrequenz zeitlich ändernde magnetische Flussdichte $B(t)$. Diese induziert um sich herum ein elektrisches Feld und damit eine Spannung (Abb. 48).

$$u_i(t) = \oint \vec{E}(t) \, ds = \frac{d\Phi}{dt} = \vec{A} \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

Ist der Kern leitfähig, dann fließt dadurch ein Strom $i(t, s) = u_i(t)/R_{\text{Kern}}(s)$, ein sogenannter Wirbelstrom. Dieser erzeugt dann ohmsche Verluste im Kernmaterial.

¹⁴Auf diesem Effekt beruhen die Dauermagnete.

Frequenzabhängigkeit

Bei konstanter maximaler Flussdichte im Kern steigt die Amplitude der induzierten Spannung proportional mit der Frequenz (wegen $u \sim dB/dt$). Die dadurch entstehende Verlustleistung ist $P_{\text{Wirbel}} = U^2/R_{\text{Kern}}$. Damit wird

$$P_{\text{Wirbel}} \sim f^2.$$

Zur Verringerung der Wirbelströme werden die Kerne von Transformatoren der Energietechnik aus voneinander isolierten Blechen aufgebaut (Abb. 48, rechts). Für HF-Trafos kommen nur nicht-leitfähige Kerne (z.B. Ferritkerne) in Frage.

6.9 Streuung

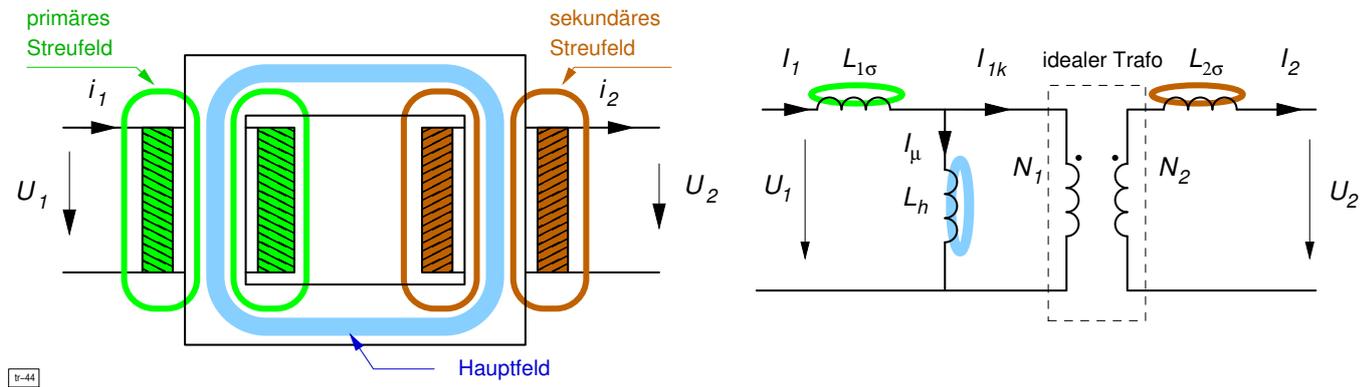


Abb. 49: Streu- und Hauptfeld, Ersatzschaltbild

Im realen Transformator gehen nicht alle Feldlinien des vom Primärstrom erzeugten Magnetfeldes auch durch die Sekundärwicklung. Genauso gehen nicht alle Feldlinien des vom Sekundärstrom erzeugten Feldes auch durch die Primärspule (Abb. 49, links).

Die nur mit einer Spule verketteten Feldlinien bilden die *Streufelder* oder den *Streufluss* Φ_σ . Die durch beide Hauptspulen gehenden Feldlinien bilden das *Hauptfeld* oder den *Hauptfluss* Φ_h .

Die Streufelder wirken wie den Wicklungen vorgeschaltete *Streuinduktivitäten* (Abb. 49, rechts).

Berücksichtigt man die Streuung, gilt für die gesamte *Selbstinduktivität* jeder Wicklung

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_h + \Phi_{1\sigma} \\ \Phi_2 &= \Phi_h + \Phi_{2\sigma} \\ L_1 &= \frac{N_1 \Phi_h}{i_1} = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_h}{i_1} + \frac{N_1 \Phi_{1\sigma}}{i_1} = L_{1h} + L_{1\sigma} \\ L_2 &= \frac{N_2 \Phi_h}{i_2} = \frac{\Psi_2}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_h}{i_2} + \frac{N_2 \Phi_{2\sigma}}{i_2} = L_{2h} + L_{2\sigma}.\end{aligned}$$

6.10 T-Ersatzschaltbild

Die nichtidealen Effekte eines realen Transformators kann man — zumindest angenähert — in einem Ersatzschaltbild (ESB) darstellen.

Die Primärwicklung wird aus einer Reihenschaltung des Wicklungswiderstandes R_1 , der Streuinduktivität $L_{1\sigma}$ und der Hauptinduktivität L_{1h} gebildet. Analog dazu besteht die Sekundärseite aus dem Wicklungswiderstand R_2 , der Streuinduktivität $L_{2\sigma}$ und der Hauptinduktivität L_{2h} . Die Streuinduktivitäten sind entkoppelt, die Hauptinduktivitäten sind magnetisch miteinander gekoppelt. Dadurch ergeben sich zwei gekoppelte Stromkreise.

Für die Hauptinduktivitäten gilt

$$L_{1h} = \frac{N_1 \Phi_h}{I_1} \quad L_{2h} = \frac{N_2 \Phi_h}{I_2} = \frac{N_2}{I_2} \left(L_{1h} \frac{I_1}{N_1} \right) = L_{1h} \frac{N_2}{N_1} \frac{I_1}{I_2} = \ddot{u}^2 L_{1h} .$$

Macht man die Hauptinduktivitäten gleich groß, kann man sie zu einer Induktivität zusammenfassen. Dies kann man erreichen durch Einfügen eines idealen Transformators mit dem Übersetzungsverhältnis $N_2/N_1 = \ddot{u}$ vor der sekundären Hauptinduktivität (siehe Abb. 49 rechts).

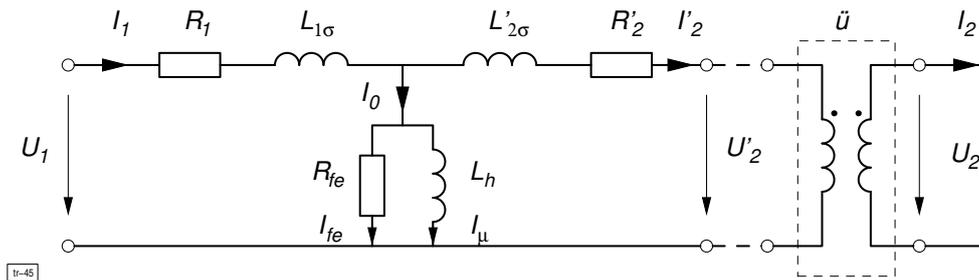


Abb. 50: T-Ersatzschaltbild eines realen Transformators

Einfacher geht es, den zu untersuchenden Transformator durch einen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1 zu ersetzen. Die sekundäre Hauptinduktivität fällt mit L_{1h} zusammen, es entsteht das sogenannte *T-Ersatzschaltbild* nach Abb. 50. Im allg. bezieht man die sekundären Größen auf die Primärseite. Die sekundären Größen ändern sich dadurch, man rechnet zuerst mit den *transformierten* Größen $R'_2, L'_{2\sigma}, U'_2$ und I'_2 . Durch Anwendung der Transformationsvorschriften für die Ströme, Spannungen und Impedanzen erhält man anschließend die realen, sekundären Größen. In der Ersatzschaltung geschieht das durch den nachgeschalteten, idealen Übertrager mit dem ursprünglichen Übersetzungsverhältnis.

Bei konstanter Frequenz ändern sich die Hysterese- und Wirbelstromverluste etwa quadratisch mit dem Hauptfluss Φ_h . Diese *Eisenverluste* werden im ESB durch den Ersatzwiderstand R_{Fe} parallel zur Hauptinduktivität erfasst.

Die Parameter des T-Ersatzschaltbildes ermittelt man im allg. mittels Leerlauf- und Kurzschlussversuchen.

Durch die Induktivitäten ist das ESB frequenzabhängig. Der Eisenverlust-Widerstand R_{Fe} und die Hauptinduktivität L_h sind zudem stark nichtlinear. Man kann aber mit konstanten Widerstands- und Induktivitätswerten rechnen, wenn die Betriebsfrequenz und -spannung konstant sind (z. B. bei Netztrafos).

Trafos ohne geschlossenen ferromagnetischen Kern (z. B. HF-Übertrager) sind annähernd linear und haben kaum Eisenverluste.

6.11 Ersatzschaltung mit Gegeninduktivität

Das Ersatzschaltbild des Transformators lässt sich auch mit Hilfe gekoppelter Induktivitäten beschreiben (Abb. 51). Diese Ersatzschaltung wird vorzugsweise bei Schaltungen mit Übertragern angewendet und eignet sich deshalb auch gut für die Berechnung transients Vorgänge. Aus diesem Grund wird im Folgenden die zeitabhängige Schreibweise verwendet.

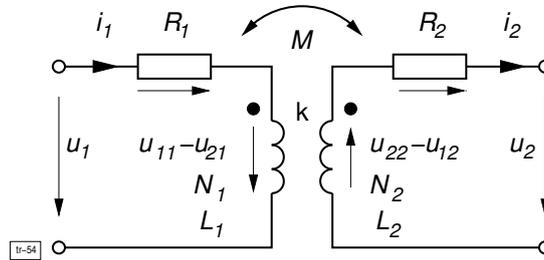


Abb. 51: Ersatzschaltbild mit Gegeninduktivitäten

Der Primärstrom i_1 erzeugt den Primärfluss Φ_1 , in der Primärspule die Selbstinduktionsspannung u_{11} und in der Sekundärspule die Gegeninduktionsspannung u_{12} :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{1h} + \Phi_{1\sigma} \\ u_{11} &= N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_{12} &= N_2 \frac{d\Phi_{1h}}{dt} = M_{12} \frac{di_1}{dt} .\end{aligned}$$

Ein Belastungstrom i_2 erzeugt einen sekundären Fluss Φ_2 , dessen Hauptfluss dem primären Hauptfluss entgegengerichtet ist, in der Sekundärspule die Selbstinduktionsspannung u_{22} und in der Primärspule die Gegeninduktionsspannung u_{21} induziert:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \Phi_{2h} + \Phi_{2\sigma} \\ u_{22} &= N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \\ u_{21} &= N_1 \frac{d\Phi_{2h}}{dt} = M_{21} \frac{di_2}{dt} .\end{aligned}$$

Unter der Annahme $M_{12} = M_{21} = M$ und den angenommenen Stromrichtungen nach Abb. 51 ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$u_1 = i_1 R_1 + u_{11} - u_{21} = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (21)$$

$$u_2 = -i_2 R_2 - u_{22} + u_{12} = -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} . \quad (22)$$

Das ESB enthält neben den Wicklungswiderständen R_1 und R_2 nur die beiden Induktivitäten L_1 und L_2 sowie die Gegeninduktivität M . Es berücksichtigt automatisch das Übersetzungsverhältnis. Alle Werte lassen sich mit 3 einfachen Messungen bestimmen.

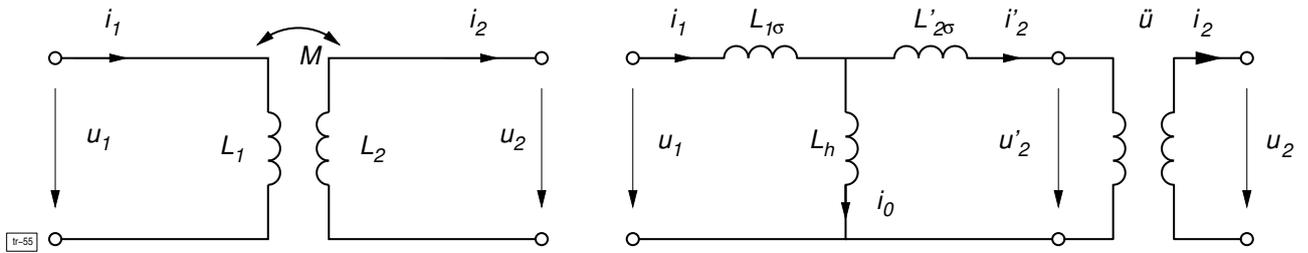


Abb. 52: Vergleich T-Ersatzschaltbild und Gegeninduktivitäten

6.12 Vergleich Gegeninduktivitäten und T-Ersatzschaltbild

Bei dem Vergleich werden die Wicklungsverluste nicht berücksichtigt. Für die Schaltung mit gekoppelten Induktivitäten (Abb. 52 links) gilt:

$$u_1 = L_1 \frac{d i_1}{d t} - M \frac{d i_2}{d t} \quad (23)$$

$$u_2 = M \frac{d i_1}{d t} - L_2 \frac{d i_2}{d t} . \quad (24)$$

Die zwei Maschenumläufe beim T-Ersatzschaltbild (Abb. 52 rechts) ergeben

$$u_1 = L_{1\sigma} \frac{d i_1}{d t} + L_h \frac{d i_0}{d t}$$

$$u'_2 = -L'_{2\sigma} \frac{d i'_2}{d t} + L_h \frac{d i_0}{d t} .$$

Ersetzt man im T-Ersatzschaltbild $i_0 = i_1 - i'_2$ erhält man

$$u_1 = L_{1\sigma} \frac{d i_1}{d t} + L_h \left(\frac{d i_1}{d t} - \frac{d i'_2}{d t} \right) = (L_{1\sigma} + L_h) \frac{d i_1}{d t} - L_h \frac{d i'_2}{d t}$$

$$u'_2 = -L'_{2\sigma} \frac{d i'_2}{d t} + L_h \left(\frac{d i_1}{d t} - \frac{d i'_2}{d t} \right) = L_h \frac{d i_1}{d t} - (L'_{2\sigma} + L_h) \frac{d i'_2}{d t} .$$

Berücksichtigt man die Übersetzungsverhältnisse beim T-Ersatzschaltbild (siehe Kapitel [Übersetzung von Impedanzen](#) und Kapitel [T-Ersatzschaltbild](#))

$$L'_{\dots} = \frac{L_{\dots}}{\ddot{u}^2} \quad u'_{\dots} = \frac{u_{\dots}}{\ddot{u}} \quad i'_{\dots} = \ddot{u} i_{\dots}$$

lassen sich die beiden letzten Gleichungen durch reale Größen ausdrücken:

$$u_1 = (L_{1\sigma} + L_h) \frac{d i_1}{d t} - \ddot{u} L_h \frac{d i_2}{d t}$$

$$u_2 = \ddot{u} L_h \frac{d i_1}{d t} - (L_{2\sigma} + \ddot{u}^2 L_h) \frac{d i_2}{d t} .$$

Durch Koeffizientenvergleich mit den Gleichungen (23) und (24) findet man schließlich

$$L_h = \frac{M}{\ddot{u}}$$

$$L_{1\sigma} = L_1 - \frac{M}{\ddot{u}}$$

$$L_{2\sigma} = L_2 - \ddot{u} M \quad (25)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 M &= \ddot{u} L_h \\
 L_1 &= L_{1\sigma} + \frac{M}{\ddot{u}} \quad \Rightarrow \quad L_{1h} = \frac{M}{\ddot{u}} \\
 L_2 &= L_{2\sigma} + \ddot{u} M \quad \Rightarrow \quad L_{2h} = \ddot{u} M.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Das T-Ersatzschaltbild reduziert die Schaltung aus gekoppelten Induktivitäten zu einer Schaltung aus ungekoppelten Spulen. Beide Schaltungen verhalten sich gleich, wenn die Schaltungsparameter beider Schaltungen die Gleichungen (25) und (26) erfüllen.

6.13 Differentialgleichungssystem

Die in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten Ersatzschaltbilder eignen sich als Modelle zur numerischen Berechnung mit symbolischen Netzwerk-Analyse-Programme (siehe auch Kapitel [Numerische Hilfsmittel](#)). Dabei kann man die Elemente des ESB direkt für die Netzwerkliste übernehmen.

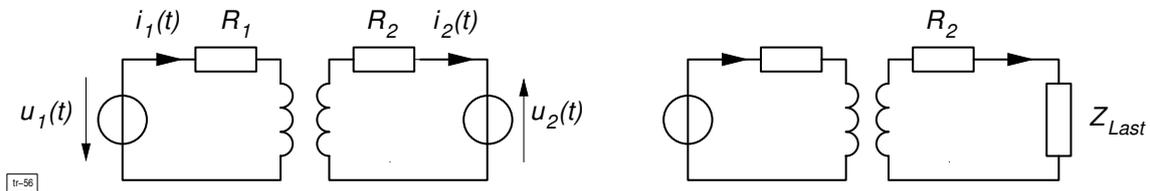


Abb. 53: Ersatzschaltung für Dgl-System

Das Betriebsverhalten des Transformators lässt sich auch in Form eines Differentialgleichungssystems (Dgl-System) entwickeln. Ausgehend von der Schaltung in Abb. 53 links liefern Maschenumläufe für Primär- und Sekundärseite die Gleichungen

$$u_1 = i_1 R_1 + \frac{d\phi_1}{dt} \tag{27}$$

$$u_2 = i_2 R_2 + \frac{d\phi_2}{dt}. \tag{28}$$

Im allgemeinen sind die einspeisenden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ vorgegeben und es werden die zeitlichen Verläufe der Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ gesucht. Zur Lösung der Gleichungen (27) und (28) führt man die Flüsse $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ als Systemvariablen ein und eliminiert die Ströme i_1 und i_2 . Es gilt:

$$\phi_1 = \phi_{1h} + \phi_{1\sigma} - \phi_{2h} = (L_{1h} + L_{1\sigma}) i_1 - L_{2h} i_2$$

$$L_{2h} i_2 = i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \phi_1$$

$$i_2 = \frac{i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \phi_1}{L_{2h}}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \phi_{2h} + \phi_{2\sigma} - \phi_{1h} = (L_{2h} + L_{2\sigma}) i_2 - L_{1h} i_1 \\
 &= \frac{(L_{2h} + L_{2\sigma}) [i_1 (L_{1h} + L_{1\sigma}) - \phi_1]}{L_{2h}} - L_{1h} i_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 L_{2h} &= i_1(L_{1h} + L_{1\sigma})(L_{2h} + L_{2\sigma}) - \phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma}) - L_{1h}L_{2h}i_1 \\ \phi_2 L_{2h} + \phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma}) &= i_1(L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma})\end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{\phi_2 L_{2h} + \phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \quad (29)$$

$$i_2 = \frac{\phi_1 L_{1h} + \phi_2(L_{1h} + L_{1\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}}. \quad (30)$$

Eingesetzt in die Gleichungen (27) und (28) erhält man schließlich das Dgl-System in der Form $\dot{\phi} = f(\phi, u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= u_1 - R_1 \frac{\phi_2 L_{2h} + \phi_1(L_{2h} + L_{2\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}} \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= u_2 - R_2 \frac{\phi_1 L_{1h} + \phi_2(L_{1h} + L_{1\sigma})}{L_{1h}L_{2\sigma} + L_{2h}L_{1\sigma} + L_{2\sigma}L_{1\sigma}}.\end{aligned} \quad (31)$$

Dieses System beschreibt die Flüsse in Abhängigkeit der einspeisenden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Mit den Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 lassen sich dann mit Hilfe der Gleichungen (29) und (30) die Ströme berechnen.

Das Dgl-System gilt für jeden zeitlichen Verlauf von u_1 bzw. u_2 . Es bietet sich besonders an, wenn die Spannungen nicht sinusförmig sind. Weiterhin lassen sich recht einfach die Sättigungserscheinungen im Eisen berücksichtigen, in dem man z. B. nichtlineare Induktivitäten $L = f(I)$ in die Dgl. einsetzt.

Ist die Sekundärseite des Transformators mit einer passiven Last (Abb. 53 rechts) belastet — das ist der Normalfall — vereinfacht sich Gleichung (28) zu

$$0 = i_2 (R_2 + Z_{\text{Last}}) + \frac{d\phi_2}{dt}.$$

In Gleichung (31) fällt der Term u_2 weg und der Widerstand R_2 muss durch den Gesamtwiderstand der Sekundärseite $R_2 + Z_{\text{Last}}$ ersetzt werden.

6.14 Kopplungs- und Streufaktoren

Statt Flüsse in Haupt- und Streuflüsse aufzuteilen führt man *Kopplungskoeffizienten* k und *Streufaktoren* σ ein:

Primärer Kopplungsfaktor:

$$k_1 = \frac{\Phi_h}{\Phi_1} = \frac{L_{1h}}{L_1} = \frac{M}{\ddot{u} L_1}$$

Sekundärer Kopplungsfaktor:

$$k_2 = \frac{\Phi_h}{\Phi_2} = \frac{L_{2h}}{L_2} = \frac{M \ddot{u}}{L_2}$$

Kopplungsgrad:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} \implies M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Primärer Streufaktor:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_1} = \frac{L_{1\sigma}}{L_1} = 1 - k_1$$

Sekundärer Streufaktor:

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{2\sigma}}{\Phi_2} = \frac{L_{2\sigma}}{L_2} = 1 - k_2$$

Streugrad

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} \quad \text{mit } 0 \leq \sigma \leq 1$$

Merke: Bei Leistungstransformatoren im Niederspannungsbereich strebt man $k \rightarrow 1$ bzw. $\sigma \rightarrow 0$ an. Mittel- und Hochspannungstransformatoren baut man dagegen mit endlicher Streuung (bis zu 12 %) zur Begrenzung von Kurzschlussströmen.

6.15 Weitere Themen

6.15.1 Numerische Simulation der Transformator-Ersatzschaltungen

siehe [7, V060: Netztransformator Simulationen]

6.15.2 Einschaltstrom – *Rush-Effekt*

siehe Skript [8, 6.5.11 Einschaltstrom eines leerlaufenden Transformators — Rush-Effekt] und [7, S24: Nichtlineare Spule an Wechselspannung]

6.15.3 Analyse des Magnetisierungsstromes

siehe [7, S28: Spule mit Hystereseverlusten]

7 Drehstromtransformator

7.1 Aufbau

Drehstromtransformatoren kann man sich im Prinzip aus drei einphasigen Transformatoren, die nicht miteinander magnetisch gekoppelt sind, zusammengesetzt vorstellen. Je nach Anwendung kann man Primär- und Sekundärseite im Stern- oder Dreieck schalten¹⁵. Bei sehr großen Leistungen geht man aus Transportgründen und zwecks Reservehaltung auch so vor (Transformatorbank).

Die Abbildungen 54 und 55 zeigen die Verwandlung von drei unabhängigen Einphasentransformatoren zu einem Drehstromtransformator.

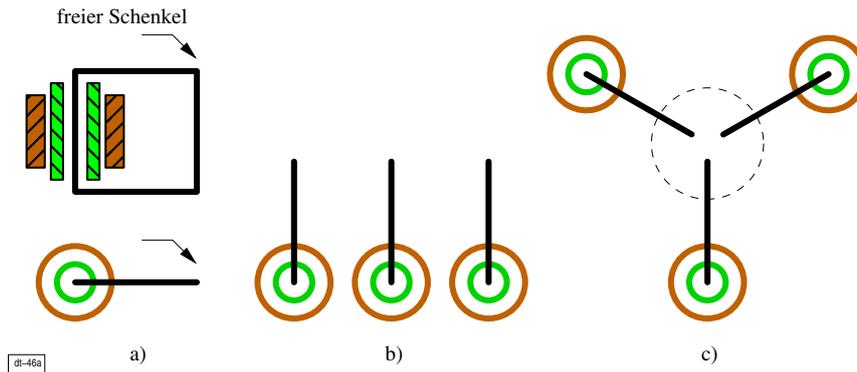


Abb. 54: Vom einphasigen zum dreiphasigen Transformator, 1. Teil

Abb. 54-a zeigt die einphasige Anordnung in Seiten- und Draufsicht. Wie man erkennt, sind hier Primär- und Sekundärspule als sog. Zylinderspulen übereinander auf einen Schenkel gewickelt, dadurch entsteht ein freier *Schenkel*, den man als *Joch* bezeichnet¹⁶. Drei Einphasentransformatoren bilden eine *Transformatorbank* (Abb. 54-b). Sie sind nicht miteinander magnetisch gekoppelt. Daran ändert sich auch nichts, wenn man die drei Transformatoren um 120° versetzt anordnet (Abb. 54-c).

Wenn ein Drehstrom-Trafo von einem symmetrischen Drehspannungssystem gespeist wird, ist die Summe der Flüsse der einzelnen Phasen (annähernd) Null, denn es gilt für jede Phase

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

und nach Gleichung (2) im Abschnitt [Symmetrieeigenschaften](#) ist diese Summe Null.

Dies trifft auf die drei Joche in Abb. 54-c zu (strichlierter Kreis). Wenn das so ist, kann man die drei Joche weglassen und spart Material. Man kommt dann zu der sog. *Tempelbauweise* nach Abb. 55-a. Diese Anordnung ist magnetisch noch symmetrisch.

Im nächsten Schritt rückt man alle drei Spulen in eine Ebene und kommt so zu der bekannten Kernbauweise nach Abb. 55-b bzw. Abb. 56-a. Diese Anordnung sieht optisch symmetrisch aus ist aber magnetisch unsymmetrisch, da der innere Schenkel einen anderen magnetischen Kreis sieht wie die beiden äußeren.

¹⁵Für die Unterspannungsseite existiert noch die Zick-Zack-Schaltung.

¹⁶Bewickelte Teile des Kerns bezeichnet man als *Schenkel*, unbewickelte als *Joch*.

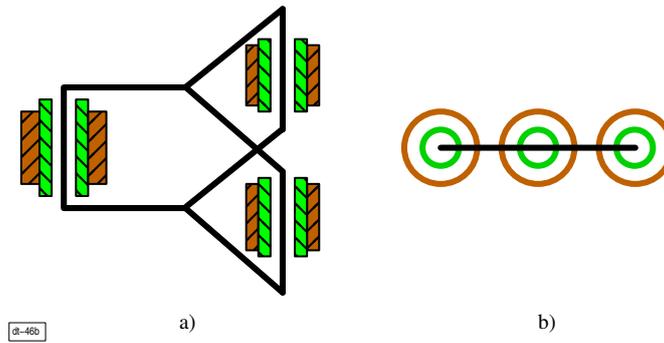


Abb. 55: Vom einphasigen zum dreiphasigen Transformator, 2. Teil

Ist die Flusssumme über die Schenkel nicht Null, dann treten Feldlinien aus dem Kern aus und laufen irgendwie durch die Umgebung. Das darf man nicht zulassen. Lassen sich Unsymmetrien der Flüsse nicht vermeiden gibt man den Feldlinien eine „Ausweichmöglichkeit“ in Form eines magnetischen Rückschlusses. Das führt zur *Mantelbauweise*(Abb. 56-b).

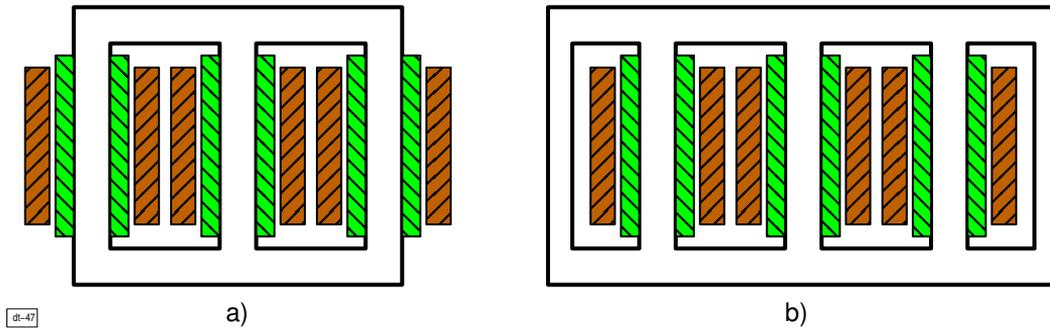


Abb. 56: Dreiphasiger Kern- und Manteltransformator

Als *Übersetzungsverhältnis* bei Drehstromtransformatoren gibt man das ungekürzte Verhältnis der Außenleiterspannungen an.

Drehstromwicklungen können, analog zu den Drehstrommaschinen, im Stern, Dreieck oder mit offenen Wicklungen ausgeführt werden. Zusätzlich existiert noch die *Zick-Zack-Schaltung*, bei der die Unterspannungswicklung auf zwei Schenkel des Kerns verteilt wird und vorteilhaft bei unsymmetrischer Belastung Verwendung findet (siehe Kapitel 7.5.4).

Die Schaltungsarten sowie die Ausführung des Sternpunktes werden durch große (OS) und kleine Buchstaben (US) gekennzeichnet (siehe Tabelle 2).

7.2 Stern-Stern Schaltung (Yy)

In dieser Schaltungsart sind sowohl die drei Primärwicklungen als auch die drei Sekundärwicklungen im Stern geschaltet (Abb. 57). Wenn auf beiden Seiten ein Neutraleiter vorhanden ist, übersetzt ein solcher Trafo phasenweise alle Ströme und Spannungen mit seinem Übersetzungsverhältnis \ddot{u} . Dies gilt auch für die Neutraleiterströme.

$$\boxed{U_{UK} = U_{1N} \ddot{u}} \quad \boxed{I_U = I_1 / \ddot{u}} \quad \boxed{I_K = I_N / \ddot{u}}$$

Tabelle 2: Schaltungsarten bei Drehstromtransformatoren

Schaltung	OS	US
Stern	Y	y
Dreieck	D	d
Zick-Zack		z
offen	III	iii
Sternpunkt herausgeführt	N	n

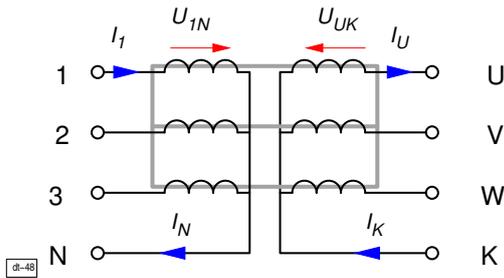


Abb. 57: Stern-Stern-Schaltung (YNyn)

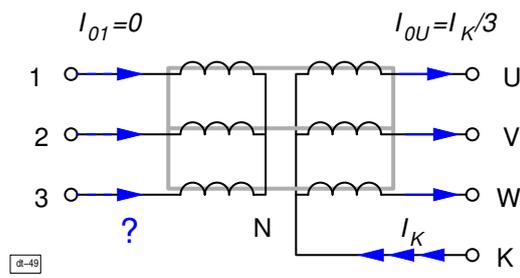


Abb. 58: Stern-Stern-Schaltung (Yyn)

Wenn ein Yy-Trafo nur auf einer Seite mit einem Neutralleiter verbunden ist, können die Ströme des Nullsystems nicht übertragen werden (Abb. 58).

Im Dreileitersystem würden die übersetzten Nullströme aus dem Vierleitersystem am Sternpunkt N die Knotenbedingung verletzen. Da die Nullströme damit das Amperewindungsgleichgewicht auf den Schenkeln verletzen, erzeugen sie gleichgerichtete Magnetflüsse auf allen Schenkeln. Deren Feldlinien können sich nur außerhalb des Kerns schließen. Das führt zu größten Problemen. Damit kann eine solche Konfiguration Neutralleiterströme nicht verdauen.

☛ Ein Yy-Trafo ist für die Kopplung eines Vierleitersystems mit einem Dreileitersystem nicht geeignet!

7.3 Dreieck-Stern Schaltung (Dy)

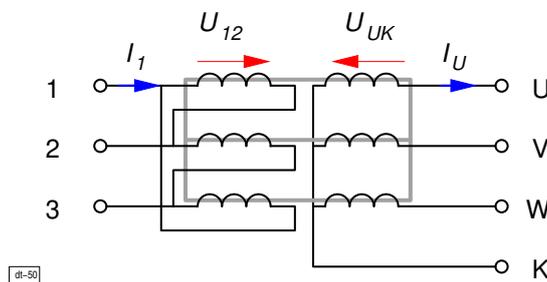


Abb. 59: Dreieck-Stern-Schaltung (Dy)

In dieser Schaltungsart sind die drei Primärwicklungen im Dreieck und die drei Sekundärwicklungen im Stern geschaltet (Abb. 59). Man kann diese Schaltung auch umkehren. Dann erhält

man eine Stern-Dreieck Schaltung (Yd). Ein solcher Trafo übersetzt Leiter-Leiter Spannungen der Primärseite in Leiter-Sternpunkt Spannungen auf der Sekundärseite. Dadurch werden die Sekundärspannungen schon bei gleichen Windungszahlen beider Seiten um den Faktor $\sqrt{3}$ größer und außerdem phasenverschoben gegenüber dem Primärsystem.

In Abb. 59 gilt:

$$\underline{U}_{UK} = \underline{U}_{12} \ddot{u} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j30^\circ} \ddot{u}$$

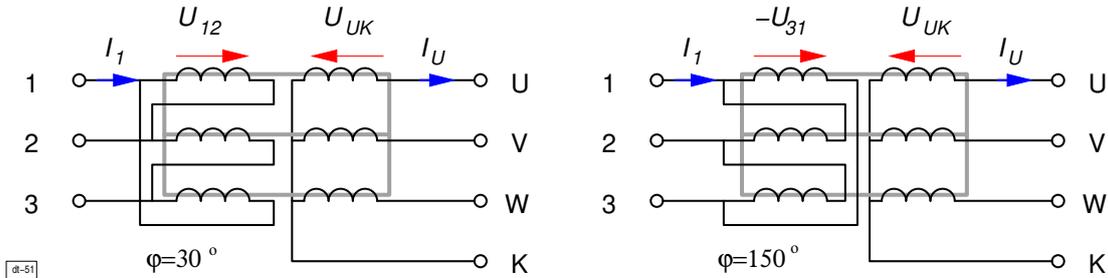


Abb. 60: Unterschiedliche Ausführung der Dreieckswicklung

Die Dreieckswicklung kann man auf zwei Arten ausführen. Beide ergeben unterschiedliche Phasenverschiebungen (Abb. 60). Durch Umpolen der Wicklungen kann man zusätzlich die Phasenverschiebungen 210° und -30° erreichen.

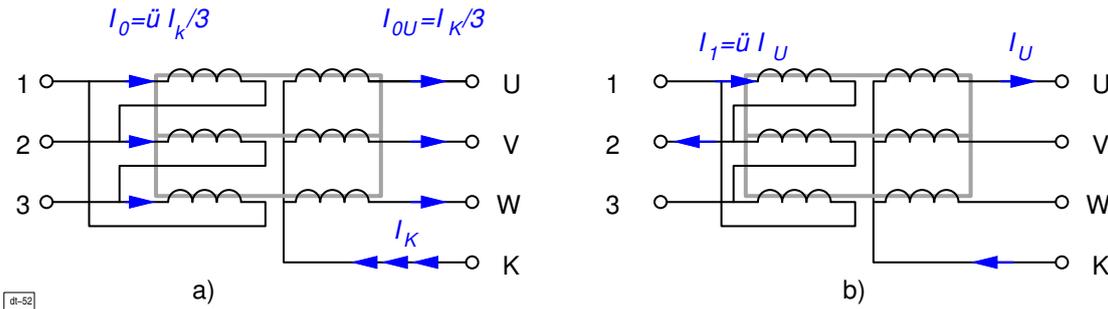


Abb. 61: Dreieck-Sternschaltung und das Nullsystem

Die auf die Primärseite übersetzten Nullströme führen hier zu einem Kreisstrom in der Dreieckswicklung (Abb. 61, links).

- ☛ Das Dreileitersystem bleibt frei von Nullströmen.
- ☛ Die Dreieckswicklung wirkt für das Nullsystem wie ein Kurzschluss. Die sekundäre Nullimpedanz des Trafos ist daher sehr klein.
- ☛ Über einen Dy-Trafo kann man auch einphasige Lasten aus einem Dreileitersystem speisen (Abb. 61, rechts).
- ☛ Ein Dy-Trafo löst das Problem der Kopplung eines Vierleitersystems an ein Dreileitersystem!

7.4 Einphasige Ersatzschaltung

Aus dem prinzipiellen Aufbau eines Drehstromtransformators aus drei Einphasentransformatoren folgt, dass sich die Grundgleichungen des einphasigen Transformators ohne Einschränkungen auf die einander zugeordneten primären und sekundären Strangspannungen bzw. -ströme anwenden lassen. Bei der Berechnung sind jedoch die Schaltungen der Primär- und Sekundärwicklungen zu beachten (Abb. 62). Außerdem muß die gegenseitige Beeinflussung der drei Wicklungsflüsse, die in Abhängigkeit der Kernauführung und bei unsymmetrischer Belastung auftreten, berücksichtigt werden.

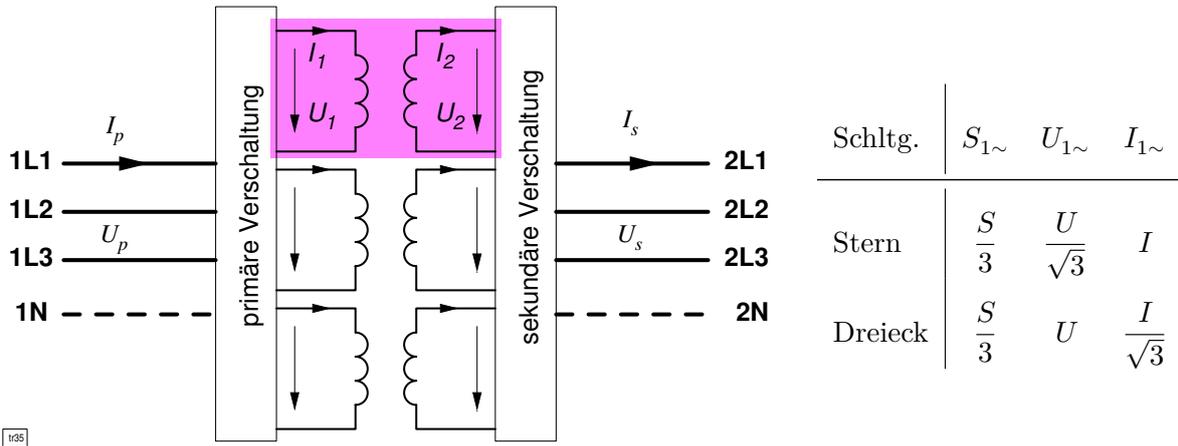


Abb. 62: Zuordnung von dreiphasigen und einphasigen Größen

Für die Scheinleistung gilt unabhängig von der inneren Schaltung

$$S = \sqrt{3}UI$$

mit U als verkettete Spannung und I als Leiterstrom. Je nach Schaltungsart müssen die einphasigen Ersatzgrößen ($1 \sim$) umgerechnet werden entsprechend der Tabelle in Abb. 62.

7.5 Mehrwickeltransformatoren (Mehrwickler)

Transformatoren, die neben der Primär- und Sekundärwicklung weitere Wicklungen besitzen, bezeichnet man als Mehrwickeltransformatoren (*Mehrwickler*). Die dritte Wicklung wird oft auch *Tertiärwicklung* genannt. Sind die Spannungen aller Wicklungen unterschiedlich spricht man von Oberspannungs- (OS), Unterspannungs- (US) und *Mittelspannungswicklungen* (MS).

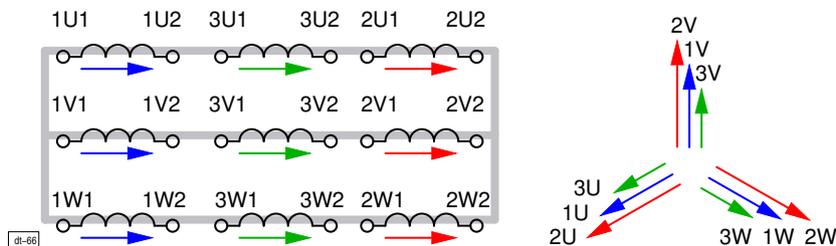


Abb. 63: Anordnung und Bezeichnung der Wicklungen eines Mehrwicklers

Abb. 63 zeigt den Aufbau und die Anschlussbezeichnungen sowie den Spannungsstern eines Mehrwicklers mit zwei Ausgangswicklungen in der *offenen Schaltung*. Alle Wicklungen sollen den gleichen Wicklungssinn haben, beim Spannungsstern zeichnet man i. allg. die Phase V nach oben und benutzt sie als Bezugsphase.

7.5.1 Maschinen-, Netzkupplungstransformator

Offensichtlich kann man mit zwei Ausgangswicklungen zwei verschiedene Netze speisen. Typisches Beispiel sind Maschinentransformatoren, die einen Kraftwerksgenerator mit dem Hochspannungsnetz verbinden. Während eine Ausgangswicklung den größten Teil der Kraftwerksleistung in das Hochspannungsnetz einspeist, liefert die zweite Ausgangswicklung die nicht unerhebliche Energie für den Eigenbedarf des Kraftwerkes (bis zu 10 % der gesamten Kraftwerksleistung).

Netzkupplungstransformatoren verbinden (kuppeln) verschiedene Mittel- und Hochspannungsnetze miteinander. Über die dritte Wicklung kann man dem Netz bei Bedarf Blindleistung zu- oder abführen, und zwar durch Anschließen von Induktivitäten oder Kapazitäten oder einer Synchronmaschine (rotierender Phasenschieber).

Als Ausgleichwicklung erlaubt sie auch unsymmetrische Belastung (siehe Kapitel 7.5.5).

7.5.2 Sechshephasenschaltung

Unter der Voraussetzung, dass Sekundär- und Tertiärwicklung gleich aufgebaut sind (gleiche Windungszahl, Belastung) lässt sich mit diesem Transformator das Dreiphasensystem in ein Sechshephasensystem umwandeln. Abb. 64 zeigt die Schaltung und den dazugehörigen Spannungsstern. Diese Schaltung wendet man bei sechshephasigen Gleichrichtern mit Nulleiter an.

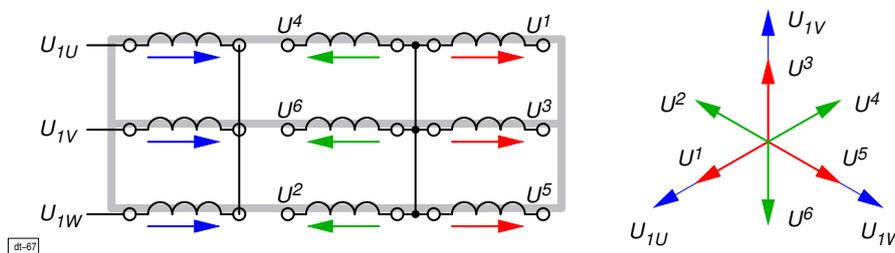


Abb. 64: Erzeugung eines Sechshephasensystems

7.5.3 Stern- und Dreieck-Schaltung

Durch Reihenschaltung der Sekundär- und Tertiärwicklung der gleichen Phase entsteht ein normales 3-phasiges System. Wegen der gleichen Phasenlage addieren sich die Spannungen algebraisch. Es sind Stern- und Dreieckschaltung möglich (siehe Abb. 65). Bei absolut gleichen Wicklungen der Ausgangsseite wäre auch eine Parallelschaltung der zu einer Phase gehörenden Wicklungen möglich zur Erhöhung der Nennstromstärke.

7 Drehstromtransformator

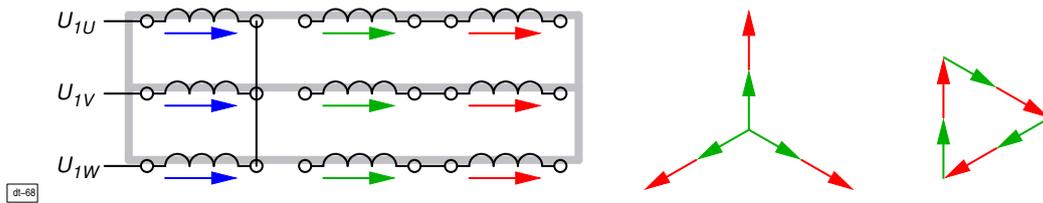


Abb. 65: Stern- und Dreieck-Schaltung eines Mehrwicklers

7.5.4 Zick-Zack-Schaltung

Bei dieser Schaltung haben die Sekundär- und Tertiärwicklungen gleiche Windungszahlen. Beide Wicklungen werden ebenfalls miteinander verbunden, aber

1. aus zwei verschiedenen Phasen und
2. gegeneinander geschaltet.

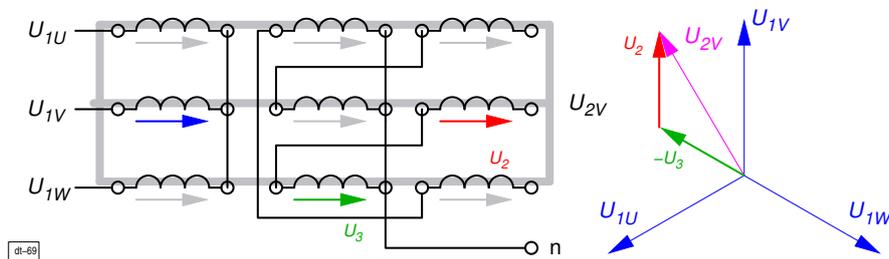


Abb. 66: Zickzack-Schaltung

Abb. 66 zeigt die Schaltung Yz und die dazugehörigen Spannungszeiger. Die beiden Teilspannungen U_2 und U_3 sind gleichgroß. Unter Berücksichtigung der Phasenlage und der Gegenschaltung von U_3 beträgt die Ausgangsspannung nur $U_{2V} = \sqrt{3} (U_2 + U_3)$. Der dadurch erhöhte Wicklungsaufwand von $2/\sqrt{3} \approx 15\%$ scheint aber gerechtfertigt, wenn man die Yz-Schaltung bei unsymmetrischer Belastung betrachtet.

Abb. 67 zeigt die Schaltung mit den eingezeichneten Flüssen. Der Belastungsstrom erzeugt in den Schenkeln der Phasen V und W entgegengesetzte Flüsse, die von den Primärströmen I_{1V} und I_{1W} vollständig kompensiert werden können, ohne die Stromsummenregel zu verletzen.

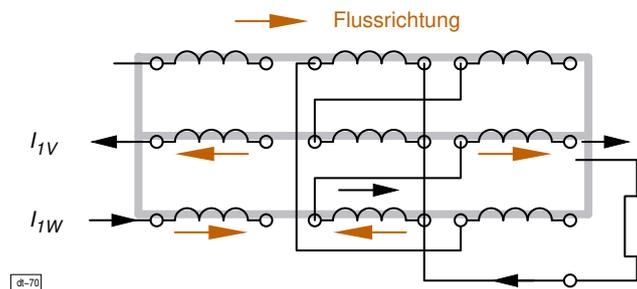


Abb. 67: Flussbilanz der Zick-Zack-Schaltung bei einsträngiger Belastung

☞ Die Zick-Zack-Schaltung erlaubt also eine unsymmetrische Belastung bis zum Nennstrom. Sie wird deshalb fast immer bei Verteilerttransformatoren in Niederspannungsnetzen eingesetzt.

7.5.5 Ausgleichswicklung

Schaltet man die Tertiärwicklung in Dreieck und schließt sie kurz erhält man eine Ausgleichswicklung. Abb. 68 zeigt die Schaltung Yy mit Ausgleichswicklung und einsträngiger Belastung.

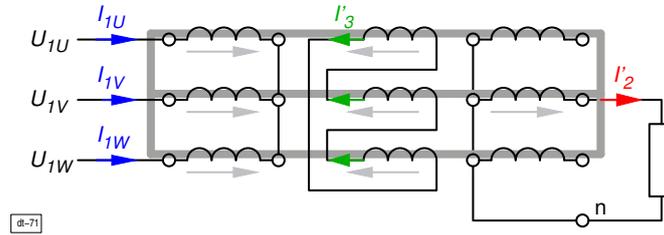


Abb. 68: Yy-Schaltung mit Ausgleichswicklung bei einsträngiger Belastung

Zum besseren Verständnis der Wirkungsweise betrachtet man die Durchflutungen in den drei Schenkeln. Bei einem „ausgeglichenen“ Transformator muss die Durchflutung, hervorgerufen durch den Belastungsstrom I_2 , durch eine entsprechende Gegendurchflutung im gleichen Schenkel kompensiert werden. Durch die kurzgeschlossene Ausgleichswicklung entsteht ein Kreisstrom I_3 , der in den beiden unbelasteten Schenkeln eine Zusatzdurchflutung erzeugt. Mit den eingezeichneten Stromrichtungen muss gelten:

$$N_1 I_{1V} - N_3 I_3 + N_2 I_2 = 0$$

Unter Berücksichtigung des Übersetzungsverhältnisses kann man die Durchflutung auch durch die transformierten Ströme ausdrücken:

$$I'_2 = I_2 \frac{N_2}{N_1}$$

$$I'_3 = I_3 \frac{N_3}{N_1}$$

$$0 = N_1 I_{1V} - N_3 \frac{N_1}{N_3} I'_3 + N_2 \frac{N_1}{N_2} I'_2 = I_{1V} - I'_3 + I'_2$$

Die Zusatzflüsse in den unbelasteten Schenkeln lassen sich primär kompensieren:

$$I_{1U} = I_{1W} = I'_3$$

Die primäre Stromsumme verlangt für Phase V:

$$I_{1V} = -(I_{1U} + I_{1W}) = -2 I'_3$$

Die Durchflutungen der Phase V kompensieren sich, wenn gilt

$$-2 I'_3 - I'_3 + I'_2 = 0$$

was mit

$$I'_3 = \frac{1}{3} I'_2$$

möglich ist.

☞ Die Ausgleichswicklung erlaubt also ein unsymmetrischen Betrieb.

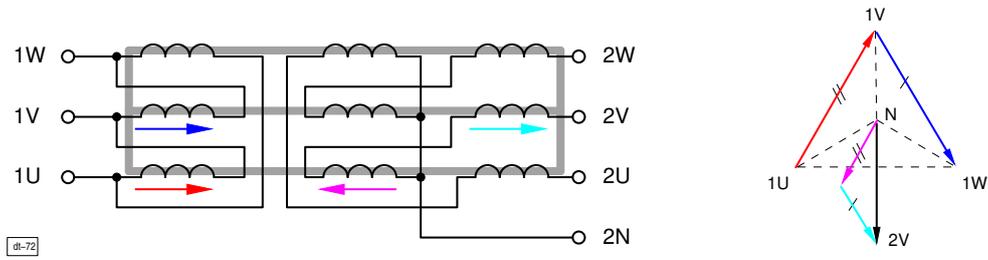


Abb. 69: Schaltgruppe Dzn6

7.6 Schaltgruppe

Bei einphasigen Transformatoren sind Primär- und Sekundärwicklung mit demselben Fluss gekoppelt, die Ausgangsspannung kann je nach Polung der Sekundäranschlüsse nur gleich- oder gegenphasig sein.

Bei Drehstromtransformatoren gilt dies ebenfalls für die Spannungen von Wicklungen, die auf einem Schenkel liegen. Weiterhin ergeben sich unterschiedliche Phasenlagen zwischen Netz und Wicklungen durch die Dreieckschaltung.

Zusätzlich können aber noch bei der Zick-Zack-Schaltung verkettete Spannungen mit Wicklungen gebildet werden, die auf anderen Schenkel liegen und jeweils um 120° phasenverschoben sind. Durch geometrische Addition dieser Wicklungsspannungen ergeben sich unterschiedliche Phasenlagen zwischen Primär- und Sekundärspannungen.

Der Winkel zwischen den korrespondierenden Spannungszeigern — man benutzt dazu die Spannungen 1V und 2V bezogen auf den vorhandenen oder angenommenen Sternpunkt N — dividiert durch 30° , ergibt eine *Kennzahl* zwischen 0 und 11 (Uhrzeiger), die zusammen mit der Schaltungsart (siehe Tabelle 2) die *Schaltgruppe* bildet.

Beispiel: Schaltgruppe Yzn11 bedeutet, der Transformator ist primär im Stern und sekundär im Zick-Zack geschaltet, der sekundäre Nulleiter ist ausgeführt, die Phasenlage zwischen den Sternspannungen 1V und 2V beträgt 330° . Die Schaltung und das Zeigerdiagramm sind in Abb. 66 dargestellt. Abbildung 69 zeigt die Schaltung und das Zeigerdiagramm der Schaltgruppe Dz6n.

Die Darstellung nach DIN 57 532 Teil 4 ist in Abb. 70 wiedergegeben. Dort werden nur die Ein- und Ausgangsklemmen bezeichnet. Der Wickelsinn ist bei allen Wicklungen gleich.

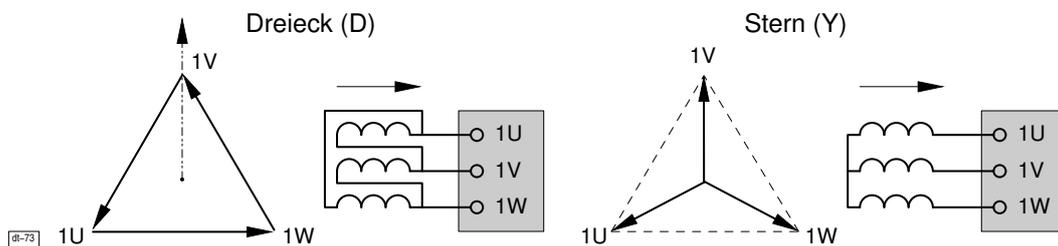


Abb. 70: Schaltgruppen Dreieck (D) und Stern (Y) nach DIN 57 532 T4

Zur Ermittlung der Kennziffer zeichnet man ein gleichseitiges Dreieck UVW mit der Phase V nach oben. In dieses Dreieck zeichnet man die Lage der Primärspannungen entsprechend der

primären Schaltungsart. In das selbe Dreieck konstruiert man jetzt die Sekundärspannung für die Klemme 2V. Dabei haben Spannungen auf dem selben Schenkel die gleiche Lage, die Richtung ergibt sich aus der Polung, gleichsinnig oder gegensinnig. Abb. 70 zeigt die Darstellung nach DIN für eine Dreieck- und eine Sternschaltung, Abb. 71 zeigt die vollständige Schaltung für die Schaltgruppen Dz6 und Yz11. Aus der Lage (dem Winkel) von 2V ergibt sich die Kennzahl (=Uhrzeit). Im Prinzip kommen nur die Kennzahlen 0, 5, 6 und 11 vor.

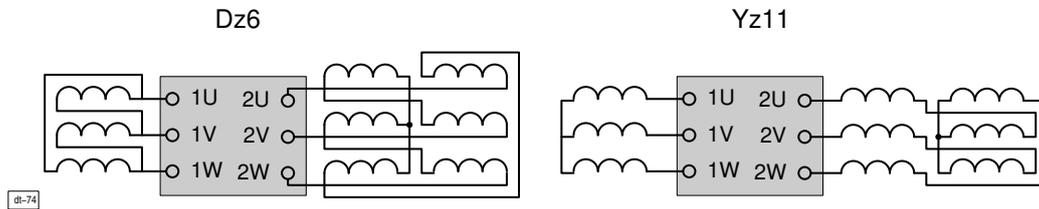


Abb. 71: Schaltgruppen Dz6 und Yz11 nach DIN 57 532 T4

8 Übungsaufgaben

Referenz: [9, 3, 2, 6]

8.1 Grundsätzliches

Beachten Sie einige wichtige Regeln beim Lösen der Übungsaufgaben:

- Raumzeiger werden in Bezug auf die Kosinus-Funktion definiert.
- Der Winkel der Phasenverschiebung φ wird in Bezug auf den Strom I angegeben und zählt positiv im mathematischen Sinn: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.
- Beim Rechnen mit Raumzeigern entspricht die Länge der Zeiger den **Effektivwerten** (vereinbarung). *Spitzenwerte* werden im allg. nur benötigt bei der Auslegung von Kondensatoren und bei Isolationsberechnungen.

8.2 Lösung mit GNUPLOT

Zum Lösen der Aufgaben mit GNUPLOT eignen sich folgende Definitionen (siehe auch Kapitel 1):

```

1 j={0,1}
2 a=-0.5+j*0.5*sqrt(3)
3 p180=180/pi
4 phi(x)=atan2( imag(x), real(x))*p180
5 versor(x)=abs(x)+j*phi(x)
6 complex(r,phi)=r*cos(phi/p180)+j*r*sin(phi/p180)
7 stern(x)=real(x)-j*imag(x)

```

Die Namen der Funktionen und Variablen sind frei wählbar. Die Funktion `complex` wandelt eine komplexe Zahl von der Exponentialform in die kartesische Form um. Die Funktion `stern` berechnet den konjugiert komplexen Wert einer Variablen, die Variable `p180` dient zum Umwandeln vom Bogenmaß in Grad und umgekehrt. Die Funktion `versor` speichert die Amplitude einer komplexen Zahl in den Realteil, den Winkel in Grad in den Imaginärteil einer komplexen Variablen ab. Diese Variable dient nur zur Ausgabe (`show var`) und *darf nicht zum Weiterrechnen benutzt werden*. Die Funktion `phi` liefert den Phasenwinkel in Grad zu einer komplexen Variablen.

8.3 Aufgaben zum Üben mit GNUPLOT

8.3.1 Beispiel 1.01

An einem passiven Netzwerk werden folgende Größen gemessen:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 150 \cdot \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \cos(\omega t - 50^\circ) \text{ A}$$

8 Übungsaufgaben

Berechnen Sie P, Q, S, φ .

Mit den o. a. definierten GNUPLOT-Funktionen schreibt man:

```
U1=complex(150,+10)
I1=complex(5,-50)
S1=U1*stern(I1)
S1_versor=versor(S1)
show var
```

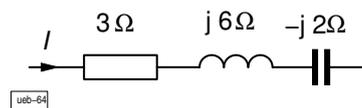
und erhält als Ergebnis:

```
U1 = {147.721162951831, 26.0472266500396}
I1 = {3.2139380484327, -3.83022221559489}
S1 = {375.0, 649.519052838329}
S1_versor = {750.0, 60.0}
```

also $P = 375 \text{ W}$; $Q = 649.5 \text{ var}$ induktiv; $S = 750 \text{ VA}$; $\varphi = 60^\circ$.

8.3.2 Beispiel 1.04

Durch die Reihenschaltung von R, L und C fließt ein Strom $\underline{I} = 10 \angle +30^\circ \text{ A}$. Berechnen Sie die Leistungen insgesamt und in den einzelnen Elementen.



```
I=complex(10,30); R=3; XL=j*6; XC=-j*2
P=abs(I)**2*R
QL=abs(I)**2*XL
QC=abs(I)**2*XC
S=P+QL+QC
S_versor=versor(S)
```

```
P = 300
QL = {0.0, 600.0}
QC = {-0.0, -200.0}
S = {300.0, 400.0}
S_versor = {500.0, 53.130102354156}
```

8.3.3 Beispiel 1.05

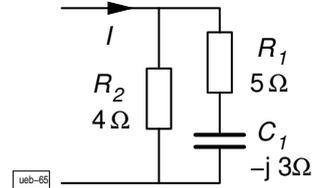
An einer Reihenschaltung aus $R = 10 \Omega$ und $X_C = 5 \Omega$ liegt eine Effektivspannung von 120 V . Bestimmen Sie die vollständigen Leistungsangaben.

```
R=10; XC=-j*5; U=120
Z=R+XC
I=U/Z
S=U*stern(I)
S_versor=versor(S)
```

```
Z = {10.0, -5.0}
I = {9.6, 4.8}
S = {1152.0, -576.0}
S_versor = {1287.97515503988, -26.565051177078}
```

8.3.4 Beispiel 1.07

Berechnen Sie die vollständigen Leistungsangaben der Parallelschaltung. Der Strom beträgt $I = 30 \text{ A}$.



```
R1=5; XC=-j*3; R2=4; I=30
Z=R2*(R1+XC)/(R1+R2+XC)
S=I*stern(I)*Z
S_versor=versor(S)
```

```
Z = {2.4, -0.5333333333333333}
S = {2160.0, -480.0}
S_versor = {2212.69066975029, -12.5288077091515}
```

8.3.5 Beispiel 1.11

Eine Spannung von $20 \angle 60^\circ \text{ V}$ wird an eine Parallelschaltung zweier Impedanzen gelegt:

$$\underline{Z}_1 = 4 \angle 30^\circ \Omega; \quad \underline{Z}_2 = 5 \angle 60^\circ \Omega.$$

Ermitteln Sie die vollständigen Einzel- und Gesamtleistungen.

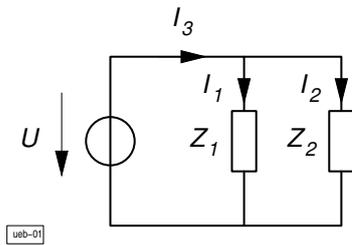
```
Z1=complex(4,30); Z2=complex(5,60); U=complex(20,60)
I1=U/Z1; I1_versor=versor(I1)
I2=U/Z2; I2_versor=versor(I2)
S1=abs(U)**2/stern(Z1); S1_versor=versor(S1)
S2=abs(U)**2/stern(Z2); S2_versor=versor(S2)
S=S1+S2; S_versor=versor(S)
```

```
Z1 = {3.46410161513775, 2.0}
Z2 = {2.5, 4.33012701892219}
U = {10.0, 17.3205080756888}
I1 = {4.33012701892219, 2.5}
I1_versor = {5.0, 30.0}
I2 = 4.0
I2_versor = 4.0
S1 = {86.6025403784439, 50.0}
S1_versor = {100.0, 30.0}
```

```
S2 = {40.0, 69.2820323027551}
S2_versor = {80.0, 60.0}
S = {126.602540378444, 119.282032302755}
S_versor = {173.943687613408, 43.29468619399}
```

Schaut man sich die Lösungswege mit GNU PLOT an fällt auf, dass das Aufwändigste die Umwandlung der Schaltungsparameter in komplexe Variablen darstellt (z.B. mit den selbst definierten Funktionen `phi`, `versor`, `complex`, `stern`). Die eigentliche Berechnung ist transparent und erfolgt wie bei Gleichstrom, wobei GNU PLOT die komplexe Arithmetik durchführt, z.B. $Z=R+XC$; $I=U/Z$; $S=U*\text{stern}(I)$. Auch die Umformung in messbare bzw. direkt darstellbare Größen erfordert einige mathematische Nacharbeit.

8.4 Wechselstromleistung



$$U = 100 \text{ V}; \quad f = 400 \text{ Hz}$$

$$\underline{Z}_1 = 100 e^{j(+30)^\circ} \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 200 e^{j(-60)^\circ} \Omega$$

1. Ermitteln Sie für jeden Zweipol einzeln die Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

• \underline{Z}_1 :

$$P_1 = U I \cos \varphi = \frac{U^2}{Z_1} \cos \varphi_1 = \frac{(100 \text{ V})^2}{100 \Omega} \cos 30^\circ = 86.6 \text{ W}$$

$$Q_1 = \frac{U^2}{Z_1} \sin \varphi_1 = 50 \text{ var}$$

$$S_1 = U I = \frac{U^2}{Z_1} = 100 \text{ VA}$$

• \underline{Z}_2 :

$$P_2 = 25 \text{ W}$$

$$Q_2 = -43.3 \text{ var}$$

$$S_2 = 50 \text{ VA}$$

2. Ermitteln Sie die Wirk-, Blind- und Scheinleistung der Parallelschaltung beider Zweipole. Sind diese Werte gleich den Summen der in Frage 1 ermittelten Einzelleistungen?

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\parallel} &= \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1}{10 e^{j(-30)^\circ} \text{ mS} + 5 e^{j(+60)^\circ} \text{ mS}} \quad (\text{ESB der Parallelschaltung}) \\ &= \frac{1}{10 \cos(-30^\circ) + j 10 \sin(-30^\circ) + 5 \cos(+60^\circ) + j 5 \sin(+60^\circ)} \frac{1}{\text{ mS}} \\ &= \frac{1}{(8.66 + 2.5) + j(-5 + 4.33)} \frac{1}{\text{ mS}} = \frac{11.16 + j 0.67}{11.16^2 + 0.67^2} \frac{\text{ mS}}{\text{ mS}^2} \\ &\approx 89.3 \Omega + j 5.4 \Omega \approx 89.5 e^{j(+3.5)^\circ} \Omega \end{aligned}$$

8 Übungsaufgaben

$$\begin{aligned}P &\approx 111.4 \text{ W} &= (P_1 + P_2) \\Q &\approx 6.7 \text{ var} &= (Q_1 + Q_2) \\S &\approx 111.8 \text{ VA} &\neq (S_1 + S_2)\end{aligned}$$

3. Ermitteln Sie für jeden Zweipol die komplexe Leistung.

$$\begin{aligned}\underline{S} &= S e^{j\varphi} \\ \underline{S}_1 &= 100 e^{j(+30)^\circ} \text{ VA} \\ \underline{S}_2 &= 50 e^{j(-60)^\circ} \text{ VA}\end{aligned}$$

4. Ermitteln Sie die komplexe Leistung der Parallelschaltung und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Summe der komplexen Einzelleistungen aus Frage 3.

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\parallel} &= 111.8 e^{j(3.5)^\circ} \text{ VA} \\ \underline{S}_1 + \underline{S}_2 &= [100 \cos(30^\circ) + j 100 \sin(30^\circ) + 50 \cos(-60^\circ) + j 50 \sin(-60^\circ)] \text{ VA} \\ &= [86.6 + j 50 + 25 + j(-43.3)] \text{ VA} \\ &= (111.6 + j 6.7) \text{ VA} \\ \underline{S}_{\parallel} &= [111.8 \cos(3.5^\circ) + j 111.8 \sin(3.5^\circ)] \text{ VA} \\ &= (111.6 + j 6.8) \text{ VA} \quad (\text{Taschenrechnergenauigkeit})\end{aligned}$$

GNU PLOT-Lösung

```
u0={100,0};
z1=complex(100,+30); s1=u0*u0/stern(z1); s1_abs=abs(s1)
z2=complex(200,-60); s2=u0*u0/stern(z2); s2_abs=abs(s2)
z12 = z1*z2/(z1+z2); s12=u0*u0/stern(z12); s12_abs=abs(s12)

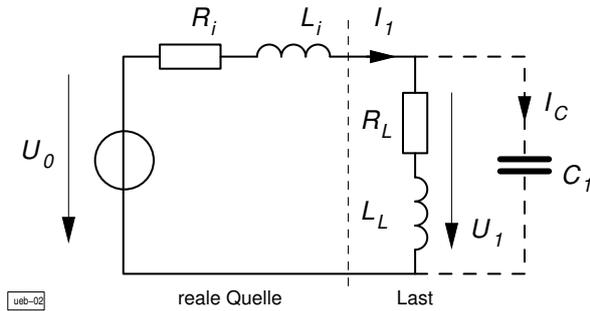
s_diff = (s1_abs+s2_abs)-s12_abs
p_diff = (real(s1)+real(s2))-real(s12)
q_diff = (imag(s1)+imag(s2))-imag(s12)
```

Lösung:

```
z1 = {86.6025403784439, 50.0}
z2 = {100.0, -173.205080756888}
s1 = {86.6025403784439, 50.0}
s1_abs = 100.0
s2 = {25.0, -43.3012701892219}
s2_abs = 50.0
z12 = {89.2820323027551, 5.35898384862244}
s12 = {111.602540378444, 6.69872981077805}
s12_abs = 111.803398874989
s_diff = 38.1966011250105
p_diff = 0.0
q_diff = 7.105427357601e-15
```

8.5 Blindleistungskompensation

8.5.1 Parallelkompensation



$$U_0 = 230 \text{ V}; \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$R_i = 100 \text{ m}\Omega$$

$$L_i = 1 \text{ mH}$$

$$R_L = 2.5 \Omega$$

$$L_L = 10 \text{ mH}$$

1. Ohne Kondensator:

a) Berechnen Sie die Wirk-, Blind- und Scheinleistung der Last.

$$\underline{U}_1 = U_0 \frac{R_L + j\omega L_L}{(R_i + R_L) + j\omega(L_i + L_L)}$$

$$U_1 = |\underline{U}_1| = U_0 \sqrt{\frac{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}{(R_i + R_L)^2 + \omega^2 (L_i + L_L)^2}} = 213.5 \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_L}$$

$$|I_1| = \frac{U_1}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}} = 53 \text{ A}$$

$$S_L = U_1 I_1 = \frac{U_1^2}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}} = U_0^2 \frac{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}}{(R_i + R_L)^2 + \omega^2 (L_i + L_L)^2} = 11.3 \text{ kVA}$$

$$\varphi_L = \arctan\left(\frac{\omega L_L}{R_L}\right) = 51.5^\circ$$

$$P_L = U_1 I_1 \cos \varphi_L = 7.1 \text{ kW}$$

$$Q_L = U_1 I_1 \sin \varphi_L = 8.8 \text{ kvar}$$

b) Wie groß sind Wirk-, Blind- und Scheinleistungsabgaben der idealen Spannungsquelle U_0 ?

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + \omega^2 (L_i + L_L)^2}}$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega(L_i + L_L)}{R_i + R_L}\right) = 53.0^\circ$$

$$S_0 = U_0 I_1 = 12.2 \text{ kVA}$$

$$P_0 = U_0 I_1 \cos \varphi_0 = 7.35 \text{ kW}$$

$$Q_0 = U_0 I_1 \sin \varphi_0 = 9.78 \text{ kvar}$$

2. Mit Kondensator:

a) Wie groß muss C_1 gewählt werden, damit U_1 und I_1 in Phase sind?

Zerlegung des unkompensierten Stroms I_1 in Wirk- und Blindstrom:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_L + j\omega L_L} = \underline{U}_1 \frac{R_L - j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}$$

$$\underline{I}_{1b} = \underline{U}_1 \frac{-j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = \underline{U}_1 (j\omega C_1)$$

Kompensation ist erreicht, wenn $\underline{I}_{1b} = -\underline{I}_C$

$$\underline{U}_1 \frac{-j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = \underline{U}_1 (-j\omega C_1)$$

$$C_1 = \frac{L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = 0.62 \text{ mF}$$

b) Wie groß sind die Wirk- und Scheinleistungsaufnahmen der um C_1 erweiterten Lastschaltung?

Durch die Kompensation ändert sich \underline{U}_1 . Daher muss die Schaltung mit der kompensierten Lastimpedanz neu durchgerechnet werden.

$$\underline{Z}'_L = (R_L + j\omega L_L) \parallel \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{(R_L + j\omega L_L) \frac{1}{j\omega C_1}}{R_L + j\omega L_L + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_L + j\omega L_L}{j\omega C_1 (R_L + j\omega L_L) + 1}$$

$$j\omega C_1 = \frac{j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = \frac{j\omega L_L}{(R_L + j\omega L_L)(R_L - j\omega L_L)} \quad (\text{siehe Lösung von 2a})$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_L &= \frac{R_L + j\omega L_L}{\frac{j\omega L_L}{(R_L + j\omega L_L)(R_L - j\omega L_L)} (R_L + j\omega L_L) + \frac{(R_L - j\omega L_L)}{(R_L - j\omega L_L)}} \\ &= \frac{(R_L + j\omega L_L)(R_L - j\omega L_L)}{j\omega L_L + R_L - j\omega L_L} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}{R_L} = 6.45 \Omega \end{aligned}$$

Die kompensierte Last wird also rein reell. Das gilt aber nur für die Frequenz, für die die Kompensation ausgelegt wurde.

$$\underline{I}'_1 = \frac{U_0}{R_i + R + j\omega L_i}$$

$$|\underline{I}'_1| = \frac{U_0}{\sqrt{(R_i + R)^2 + \omega^2 L_i^2}} = 35.08 \text{ A}$$

$$P'_L = |\underline{I}'_1|^2 R = 7.937 \text{ kW}$$

$$Q'_L = 0$$

$$S'_L = P'_L = 7.937 \text{ kVA}$$

- c) Wie groß sind jetzt Wirk-, Blind- und Scheinleistungsabgaben der idealen Spannungsquelle U_0 ?

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{\omega L_i}{R_i + R}\right) = 2.7^\circ$$

$$P'_0 = U_0 |I'_1| \cos \varphi' = 8.07 \text{ kW}$$

$$Q'_0 = U_0 |I'_1| \sin \varphi' = 0.38 \text{ kvar}$$

$$S'_0 = U_0 |I'_1| = 8.08 \text{ kVA}$$

- d) Ermitteln Sie den Wirkungsgrad der Energieübertragung von der idealen Quelle U_0 zur Last für Fall 1 und Fall 2.

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_L}{P_0} = \frac{7.1 \text{ kW}}{7.35 \text{ kW}} = 96.6 \%$$

$$\eta' = \frac{P'}{P'_0} = \frac{7.937 \text{ kW}}{8.07 \text{ kW}} = 98.35 \%$$

GNU PLOT Lösung

Parallelkompensation:

```

U0=230.; Ri=0.1; RL=2.5; Li=1e-3; LL=10e-3

Zi=Ri+j*w*Li;          ZL=RL+j*w*LL
I1=U0/(Zi+ZL)
SL=I1*stern(I1)*ZL;    SL_versor=versor(SL)

S0=U0*stern(I1);      S0_versor=versor(S0)

U1 = I1*ZL;           C1 = imag(SL)/(abs(U1)*abs(U1)*w)

ZC1=1./(j*w*C1);      ZLs= ZL*ZC1/(ZL+ZC1)
I1s=U0/(Zi+ZLs)
SLs=I1s*stern(I1s)*ZLs; SLs_versor=versor(SLs)

S0s = U0*stern(I1s);   S0s_versor = versor(S0s)

eta=real(SL)/real(S0); etas = real(SLs)/real(S0s)

```

Ergebnisse:

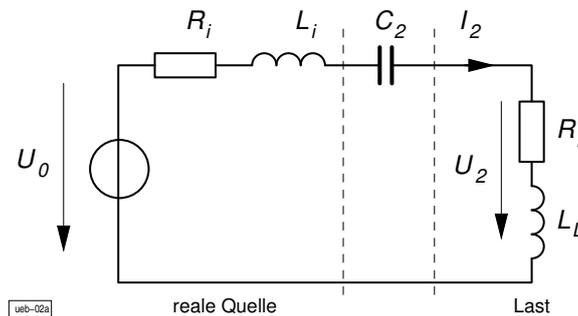
```

Zi = {0.1, 0.314159265358979}
ZL = {2.5, 3.14159265358979}
I1 = {31.9748114193504, -42.4988522770943}
SL = {7071.35252543326, 8886.1236579379}
SL_versor = {11356.3735498228, 51.4881127460334}
S0 = {7354.20662645059, 9774.73602373169}
S0_versor = {12232.3268202811, 53.0433380367166}

```

$U_1 = \{213.451110648093, -5.79529803778559\}$
 $C_1 = 0.000620362618782642$
 $ZC_1 = \{0.0, -5.13102944223849\}$
 $ZL_s = \{6.44784176043574, 2.44271750702058e-15\}$
 $I_1s = \{35.0454037756247, -1.68144538416983\}$
 $SL_s = \{7937.34210995603, 3.00700377763164e-12\}$
 $SL_s_versor = \{7937.34210995603, 2.1706085368562e-14\}$
 $S0s = \{8060.44286839369, 386.732438359061\}$
 $S0s_versor = \{8069.71506396092, 2.74689092450967\}$
 $\eta = 0.961538461538462$
 $\eta_{as} = 0.984727792201053$

8.5.2 Serienkompensation



1. Ermitteln Sie die Kapazität des Kondensators C_2 so, dass der Strom \underline{I}_2 in Phase mit der Quellenspannung \underline{U}_0 ist.

Maschenumlauf: $\underline{U}_0 = (R_i + jX_i - jX_{C_2} + R_L + jX_L) \underline{I}_2$

\underline{U}_0 in Phase mit \underline{I}_2 : Klammerausdruck muss rein reell sein.

$$0 = jX_i - jX_{C_2} + jX_L$$

$$X_{C_2} = X_i + X_L$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = \omega (L_i + L_L)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 (L_i + L_L)} = 0.921 \text{ mF}$$

2. Wie groß wird mit dieser Kapazität der Strom \underline{I}_2 ?

$$\underline{U}_0 = (R_i + R_L) \underline{I}_2 + j \underbrace{(X_i - X_{C_2} + X_L)}_{=0} \underline{I}_2 = (R_i + R_L) \underline{I}_2$$

$$I_2 = \frac{U_0}{R_i + R_L} = 88.46 \text{ A}$$

3. Für welche Spitzenspannung (Scheitelwert) muss der Kondensator ausgelegt werden?

$$\hat{U}_{C_2} = \hat{I}_2 X_{C_2} = \sqrt{2} I_2 \frac{1}{\omega C_2} = 432.3 \text{ V}$$

4. Wie groß wird die Spannung U_2 an der Last?

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 (R_L + j X_L)$$

$$|\underline{U}_2| = I_2 \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = 88.46 \text{ A} \cdot 4.0 \Omega = 355 \text{ V} > U_0$$

GNU PLOT Lösung

Für die Serienkompensation muss der Kondensator die gesamte Blindleistung der Reihenschaltung von \underline{Z}_i und \underline{Z}_L kompensieren, d. h. die Blindleistung durch den Kondensator muss gleich der gesamten Blindleistung Q_0 sein. Daraus folgt für die Kapazität

$$C_2 = \frac{I_1^2}{\omega Q_0}$$

mit den Werten I_1 und Q_0 aus der Aufgabe für die Parallelkompensation. Mit den Anweisungen:

```
C2= abs(I1)*abs(I1)/(w*imag(S0));   ZC2=1./(j*w*C2)
I2=U0/(Zi+ZL+ZC2)
UC2_hat=sqrt(2)*abs(I2*ZC2)
U2=I2*ZL; U2_versor=versor(U2)
```

erhält man

```
C2 = 0.000921101669475798
ZC2 = {0.0, -3.45575191894877}
I2 = 88.4615384615385
UC2_hat = 432.32668590541
U2 = {221.153846153846, 277.91011935602}
U2_versor = {355.166240103302, 51.4881127460334}
```

8.6 Drehstrom, Stern-, Dreieckschaltung, Phasenunterbrechung

Gegeben ist ein symmetrisches Dreiphasen-Spannungssystem mit den Quellenspannungen $U_0 = 230 \text{ V}$ und dem Nullphasenwinkel $\varphi_0 = -30^\circ$. Die Frequenz beträgt 50 Hz . Das System ist in Stern geschaltet.

1. Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der drei Spannungen des Systems.

siehe Abbildung 72

2. Wie groß sind die Momentanwerte der drei Spannungen zur Zeit $t_1 = 10 \text{ ms}$?

$$U_U(t_1) = \sqrt{2} 230 \text{ V} \sin\left(2\pi 50 \text{ s}^{-1} 10 \text{ ms} - \frac{\pi}{6}\right) = 162.63 \text{ V}$$

$$U_V(t_1) = \sqrt{2} 230 \text{ V} \sin\left(2\pi 50 \text{ s}^{-1} 10 \text{ ms} - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = 162.63 \text{ V}$$

$$U_W(t_1) = \sqrt{2} 230 \text{ V} \sin\left(2\pi 50 \text{ s}^{-1} 10 \text{ ms} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -325.27 \text{ V}$$

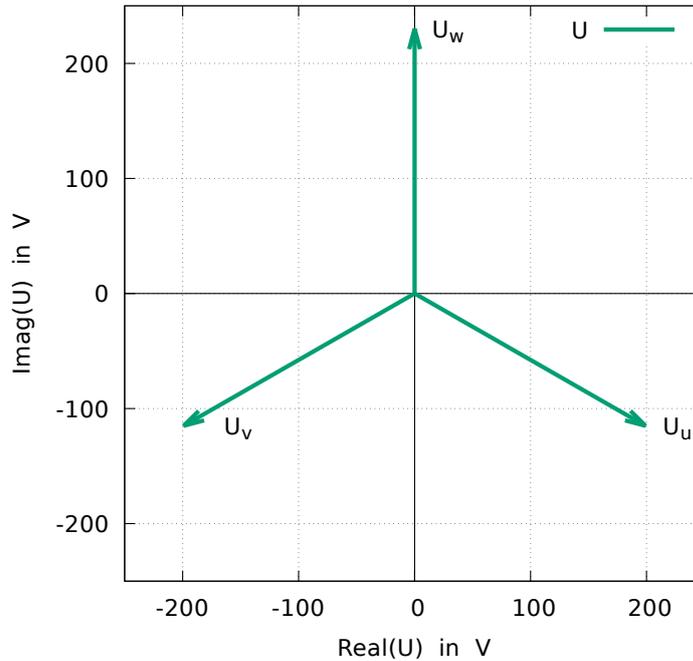


Abb. 72: Zeigerdiagramm der Spannungen

3. Wie groß sind die Momentanwerte der drei Außenleiterspannungen zu diesem Zeitpunkt?

$$U_{UV}(t_1) = U_U(t_1) - U_V(t_1) = 0 \text{ V}$$

$$U_{VW}(t_1) = U_V(t_1) - U_W(t_1) = 487.9 \text{ V}$$

$$U_{WU}(t_1) = U_W(t_1) - U_U(t_1) = -487.9 \text{ V}$$

4. Das Spannungssystem wird nun mit drei ohmsch-induktiven Verbrauchern belastet. Die Verbraucher sind ebenfalls in Stern geschaltet. Der Sternpunkt der Verbraucher ist durch einen Neutralleiter mit dem Sternpunkt des speisenden Spannungssystems verbunden. Die Impedanz aller drei Verbraucher beträgt $\underline{Z} = (100 + j50) \Omega$.

Ermitteln Sie die 3 Verbraucherströme und zeichnen Sie sie in das Zeigerdiagramm.

$$\underline{I}_U = \frac{U_U}{\underline{Z}} \quad \text{mit} \quad \underline{Z} = (100 + j50) \Omega = 111.8 \Omega e^{j(26.56)^\circ}$$

$$\underline{I}_U = \frac{230 \text{ V}}{111.8 \Omega} e^{j(-30-26.56)^\circ} = 2.05 \angle -56.56^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_V = \frac{230 \text{ V}}{111.8 \Omega} e^{j(-30-120-26.56)^\circ} = 2.05 \angle -176.56^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_W = \frac{230 \text{ V}}{111.8 \Omega} e^{j(-30+120-26.56)^\circ} = 2.05 \angle 63.43^\circ \text{ A}$$

siehe Abbildung [73](#)

8 Übungsaufgaben

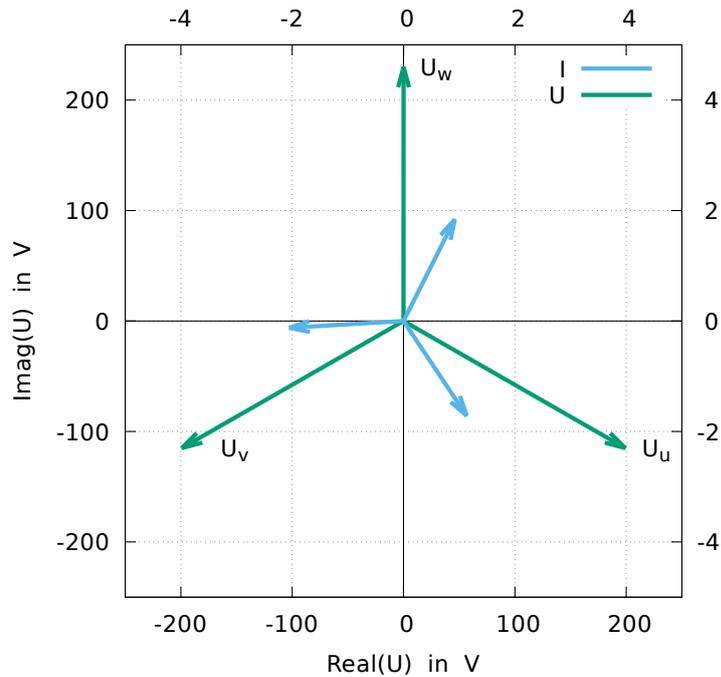


Abb. 73: Zeigerdiagramm der Spannungen

5. Wie groß ist der Neutralleiterstrom?

$$\underline{I}_U = \frac{U_U}{Z} \quad \underline{I}_V = \frac{U_V}{Z} = a^2 \frac{U_U}{Z} \quad \underline{I}_W = \frac{U_W}{Z} = a \frac{U_U}{Z}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_U + \underline{I}_V + \underline{I}_W = \frac{U_U}{Z} \underbrace{(1 + a + a^2)}_{=0} = 0$$

6. Der Verbraucher der Phase W wird abgeschaltet. Wie groß ist der Neutralleiterstrom jetzt?

$$\underline{I}_N = \underline{I}_U + \underline{I}_V = \underline{I}_U + \underline{I}_V + \underline{I}_W - \underline{I}_W = 0 - \underline{I}_W = -\underline{I}_W = 2.05 \angle(63.43 - 180)^\circ \text{ A} = 2.05 \angle -116.56^\circ \text{ A}$$

7. Nun werden die drei Verbraucher im Dreieck geschaltet. Wie groß sind die drei Verbraucherströme jetzt?

An den Verbrauchern liegen jetzt die Außenleiterspannungen, also:

$$\underline{I}_{12} = \frac{U_U - U_V}{Z} = \frac{\sqrt{3} \cdot 230 \text{ V}}{111.8 \Omega} e^{j(0^\circ + 30 - 30 - 26.56)} = 3.56 \text{ A } e^{j(0^\circ - 26.56)}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{U_V - U_W}{Z} = 3.56 \text{ A } e^{j(0^\circ - 146.56)}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{U_W - U_U}{Z} = 3.56 \text{ A } e^{j(0^\circ 93.43)}$$

8. Zeichnen Sie sie in das Zeigerdiagramm ein. siehe Abbildung 74

8 Übungsaufgaben

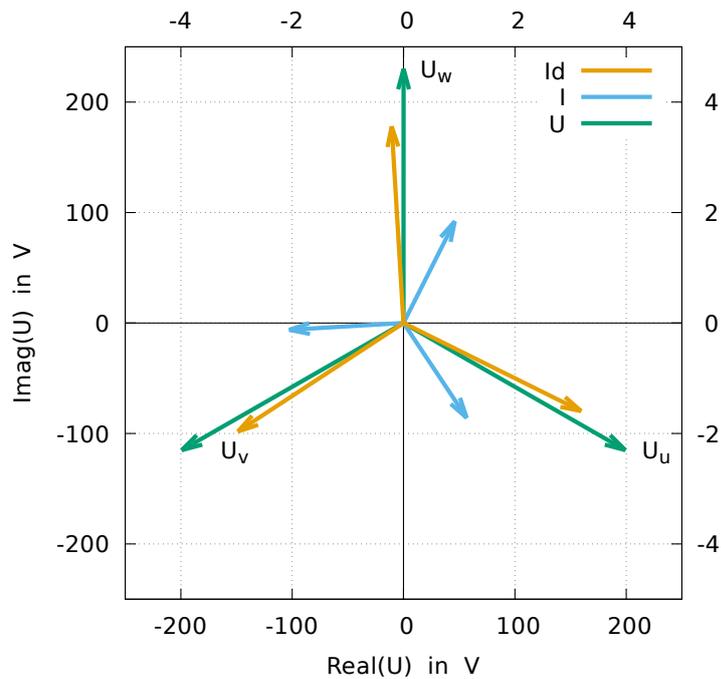


Abb. 74: Zeigerdiagramm der Spannungen

GNU PLOT Lösung

Zeigerdiagramm der drei Spannungen (Abbildung 72):

```
UU=complex(230,-30)
UV=complex(230,-30-120)
UW=complex(230,-30+120)
```

```
set arrow to real(UU), imag(UU)
set arrow to real(UV), imag(UV)
set arrow to real(UW), imag(UW)
```

```
UU = {199.185842870421, -115.0}
UV = {-199.185842870421, -115.0}
UW = {1.40829730689573e-14, 230.0}
```

Momentanwerte der Strangspannungen bei $t_1 = 10 \text{ ms}$

```
uu=sqrt(2)*230*sin(w*0.01-pi/6)
uv=sqrt(2)*230*sin(w*0.01-pi/6-2*pi/3)
uw=sqrt(2)*230*sin(w*0.01-pi/6+2*pi/3)
```

Ergebnis:

```
uu = 162.634559672906
uv = 162.634559672906
uw = -325.269119345812
```

8 Übungsaufgaben

Momentanwerte der Außenleiterspannungen:

```
uuv=uu-uv
uvw=uv-uw
uwu=uw-uu
```

Ergebnis:

```
uuv = -1.13686837721616e-13
uvw = 487.903679018718
uwu = -487.903679018718
```

Verbraucherströme, Zeigerdiagramm (Abbildung 73):

```
Z={100,50}
IU=UU/Z; IU_versor=versor(IU)
IV=UV/Z; IV_versor=versor(IV)
IW=UW/Z; IW_versor=versor(IW)
set arrow to real (IU), imag(IU)
set arrow to real (IV), imag(IV)
set arrow to real (IW), imag(IW)
```

```
IU = {1.13348674296337, -1.71674337148168}
IU_versor = {2.05718253929981, -56.565051177078}
IV = {-2.05348674296337, -0.123256628518316}
IV_versor = {2.05718253929981, -176.565051177078}
IW = {0.92, 1.84}
IW_versor = {2.05718253929981, 63.434948822922}
```

Neutralleiterstrom bei symmetrischer Belastung:

```
IN=IU+IV+IW
```

```
IU = { 1.13348674296337, -1.71674337148168}
IV = {-2.05348674296337, -0.123256628518316}
IW = { 0.92, 1.84}
IN = 2.22044604925031e-16
```

Neutralleiterstrom bei abgeschalteter Phase W:

```
IN_UV=IU+IV
IN_UV_versor=versor(IN_UV)
```

```
IN_UV = {-0.92, -1.84}
IN_UV_versor = {2.05718253929981, -116.565051177078}
```

Verbraucher im Dreieck, Zeigerdiagramm (Abbildung 74):

```

I12=(UU-UV)/Z; I12_versor=versor(I12)
I23=(UV-UW)/Z; I23_versor=versor(I23)
I31=(UW-UU)/Z; I31_versor=versor(I31)

set arrow to real(I12), imag(I12)
set arrow to real(I23), imag(I23)
set arrow to real(I31), imag(I31)

```

```

I12 = {3.18697348592673, -1.59348674296337}
I12_versor = {3.56314467851082, -26.565051177078}
I23 = {-2.97348674296337, -1.96325662851832}
I23_versor = {3.56314467851082, -146.565051177078}
I31 = {-0.213486742963367, 3.55674337148168}
I31_versor = {3.56314467851082, 93.434948822922}

```

8.7 Drehstrom, symmetrische Belastung, Zuleitungsverluste

Drei Verbraucher mit gleicher Impedanz Z werden in Stern an eine ebenfalls im Stern geschaltete Drehspannungsquelle mit der Strangspannung U_Q geschaltet.

Daten: $U_Q = 230 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $Z = (10 + j10) \Omega$.

1. Welche Blind- und Wirkleistung nimmt die Last insgesamt auf?

Da die Lastimpedanzen gleich sind, liegt symmetrische Belastung vor.

$$|Z| = \sqrt{2} \cdot 10 \Omega = 14.1 \Omega$$

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\Im(Z)}{\Re(Z)}\right) = 45^\circ \quad (\text{Abb. 75})$$

$$P = 3 U_{1N} I_{L1} \cos \varphi_Z = 3 U_Q \frac{U_Q}{|Z|} \cos \varphi_Z = \frac{3 (230 \text{ V})^2}{\sqrt{2} 10 \Omega} \frac{\sqrt{2}}{2} = 7.9 \text{ kW}$$

$$Q = 3 U_{1N} I_{L1} \sin \varphi_Z = 7.9 \text{ kvar}$$

2. Welche Leistung nimmt die Last zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ ms}$ auf?

Bei symmetrischer Belastung ist die Gesamtleistung konstant ($P = 7.9 \text{ kW}$).

3. Wie groß sind die Einzelleistungen der drei Verbraucher zu diesem Zeitpunkt?

$$p_U(t) = \sqrt{2} 230 \text{ V} \sin(2\pi 50 \text{ Hz } 10 \text{ ms}) \frac{\sqrt{2} 230 \text{ V} \sin(2\pi 50 \text{ Hz } 10 \text{ ms} - \pi/4)}{14.1 \Omega} = 0$$

$$\begin{aligned}
p_V(t) &= \sqrt{2} 230 \text{ V} \sin\left(2\pi 50 \text{ Hz } 10 \text{ ms} - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{\sqrt{2} 230 \text{ V} \sin\left(2\pi 50 \text{ Hz } 10 \text{ ms} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{14.1 \Omega} \\
&= 1.67 \text{ kW}
\end{aligned}$$

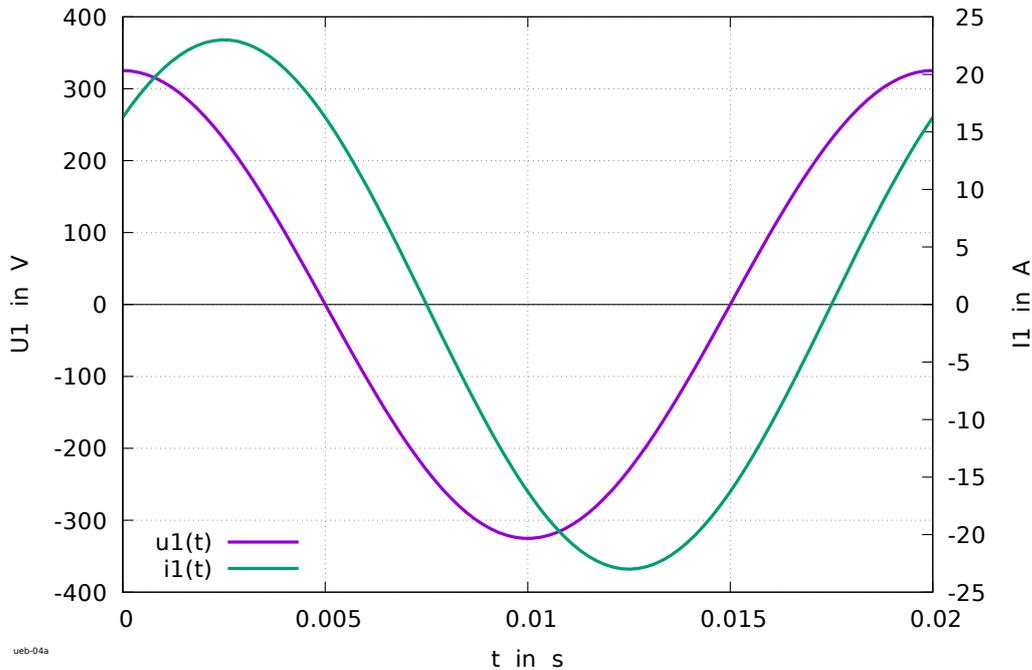


Abb. 75: Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom der Phase U

$$p_W(t) = \sqrt{2} \, 230 \, \text{V} \sin\left(2\pi \, 50 \, \text{Hz} \, 10 \, \text{ms} - \frac{4\pi}{3}\right) \frac{\sqrt{2} \, 230 \, \text{V} \sin\left(2\pi \, 50 \, \text{Hz} \, 10 \, \text{ms} - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{14.1 \, \Omega}$$

$$= 6.25 \, \text{kW}$$

$$p_\Sigma = p_U(t) + p_V(t) + p_W(t) = 7.93 \, \text{kW} \quad (\text{Abb. 76})$$

4. Jede Verbindungsleitung zwischen der Quelle und der Last hat einen ohmschen Widerstand $R_L = 1 \, \text{m}\Omega$. Wie groß sind die gesamten Zuleitungsverluste? (Vernachlässigen Sie die Auswirkung der Spannungsfälle an den Leitungen auf die Spannungen der Verbraucher.)

$$P_L = 3 \cdot 1 \, \text{m}\Omega \, I_{L1}^2 = 3 \cdot 1 \, \text{m}\Omega \frac{U_Q^2}{|Z|^2} = 3 \cdot 1 \, \text{m}\Omega \frac{(230 \, \text{V})^2}{(\sqrt{2} \cdot 10 \, \Omega)^2} = 790 \, \text{mW}$$

5. Die drei Verbraucher werden auf Dreieck umgeschaltet. Welche Wirk- und Blindleistungen nimmt die Last jetzt insgesamt auf?

$$P_\Delta = 3 U_{12} \frac{U_{12}}{|Z|} \cos\varphi = 3 \frac{(\sqrt{3} \, 230 \, \text{V})^2}{\sqrt{2} \, 10 \, \Omega} \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \frac{3}{2} \frac{(230 \, \text{V})^2}{10 \, \Omega} = 23.8 \, \text{kW} = 3 P$$

Die Wirkleistungsaufnahme verdreifacht sich. Dies ist generell der Fall, wenn gleiche Impedanzen von Stern auf Dreieck umgeschaltet werden.

$$Q_\Delta = P_\Delta = 23.8 \, \text{kvar}$$

wegen $\varphi = 45^\circ$.

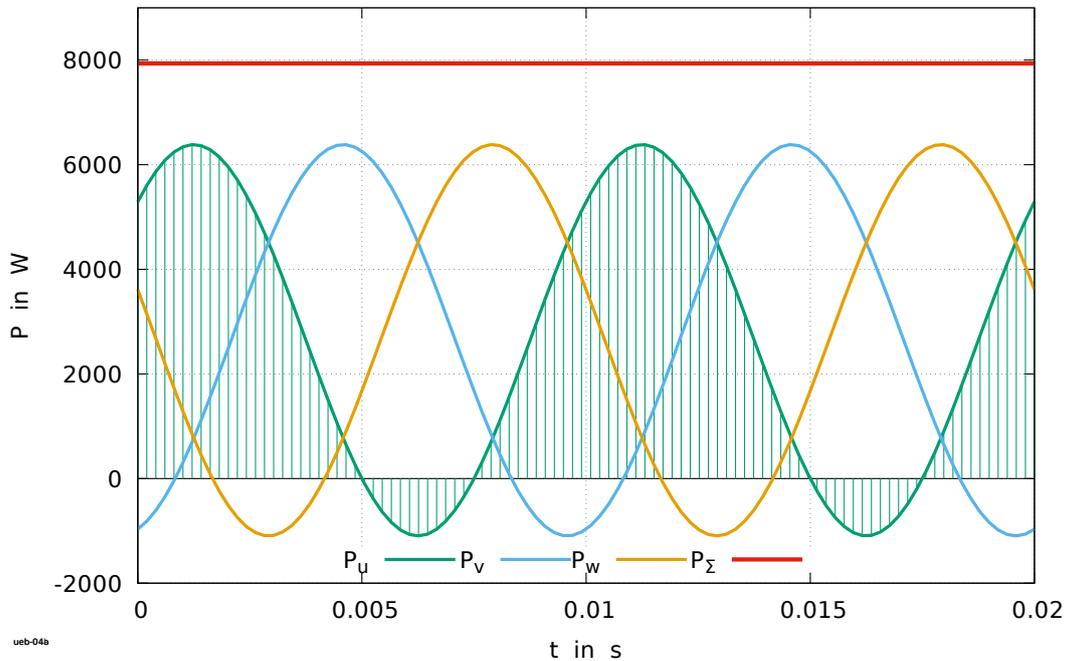


Abb. 76: Zeitlicher Verlauf der Einzelleistungen und der Gesamtleistung

6. Wie hoch sind jetzt die Zuleitungsverluste bei der Dreieckschaltung?

$$I_{L1\Delta} = \sqrt{3} I_{1Z\Delta} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3} U_{1N}}{|Z|} = 3 I_{L1}$$

$$P_{L\Delta} = 3 \cdot 1 \text{ m}\Omega I_{L1\Delta}^2 = 3 \cdot 1 \text{ m}\Omega (3 I_{L1})^2 = 9 P_L$$

Durch die Stern–Dreieck-Umschaltung verdreifachen sich die Leiterströme. Damit steigen die Zuleitungsverluste auf das $3^2 = 9$ -fache an.

GNU PLOT-Lösung

Die analytische Berechnung geht von einer Sinusfunktion aus. Die GNU PLOT-Lösung benutzt die vereinbarte Cosinus-Funktion.

```
UQ=230.; Z={10,10}; f=50.; w=2*pi*f; T=1./f
S=3*UQ*UQ/stern(Z); S_versor=versor(S)
I1=UQ/Z
i1(t)=abs(I1)*sqrt(2)*cos(w*t-imag(S_versor)/p180)
u1(t)=UQ*sqrt(2)*cos(w*t)
p1(t)=u1(t)*i1(t)
p1t1=p1(0.015); p2t1=p1(0.015+T/3.); p3t1=p1(0.015-T/3.)
pg=p1t1+p2t1+p3t1
```

Der Term 'imag(S_versor)' missbraucht den Imaginärteil als Phasenverschiebungswinkel in Grad. Als Ergebnis erhält man:

S = {7935.0, 7935.0}
 S_versor = {11221.7846174305, 45.0}
 I1 = {11.5, -11.5}
 p1t1 = 9.71725141758057e-13
 p2t1 = 6258.13719300984
 p3t1 = 1676.86280699016
 pg = 7935.0

8.8 Drehstrom, Leistung bei unsymmetrischer Belastung

Eine im Stern geschaltete, symmetrische Spannungsquelle der Strangspannung $U_Q = 230\text{ V}$ wird mit folgenden Impedanzen belastet (Abb. 77):

$$\underline{Z}_1 = (4 + j3)\ \Omega \qquad \underline{Z}_2 = (4 - j3)\ \Omega \qquad \underline{Z}_3 = 5\ \Omega$$

Die Impedanzen sind im Stern geschaltet. Ein Neutraleiter ist vorhanden.

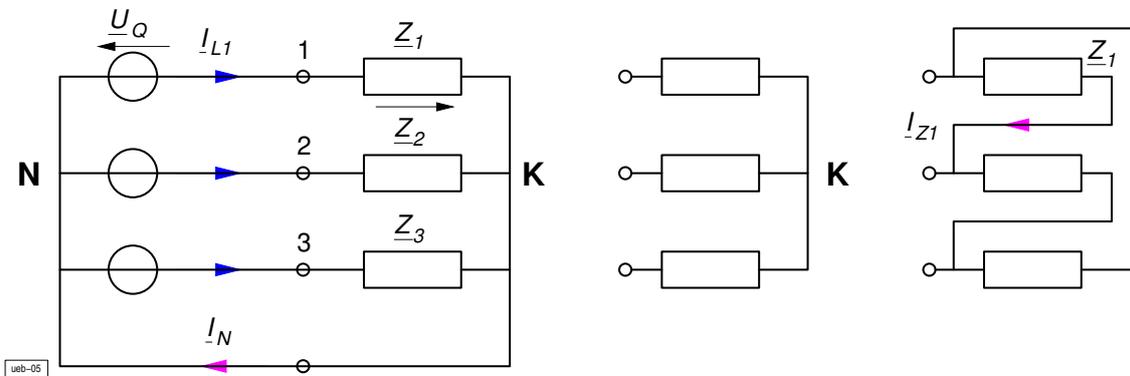


Abb. 77: Unsymmetrisches Drehstromnetz

1. Wie groß sind die Beträge der drei Leiterströme I_{L1} etc.?

$$|\underline{Z}_1| = U\sqrt{16 + 9} = 5\ \Omega = |\underline{Z}_2| \quad \Rightarrow \quad |\underline{I}_{L1}| = |\underline{I}_{L2}| = |\underline{I}_{L3}| = \frac{230\text{ V}}{5\ \Omega} = 46\text{ A}$$

2. Wie groß ist der Betrag des Neutralleiterstromes?

$$\varphi_{Z1} = \arctan \frac{3\ \Omega}{4\ \Omega} = +36.87^\circ$$

$$\varphi_{Z2} = -36.87^\circ$$

$$\varphi_{Z3} = 0^\circ$$

$$\underline{I}_{L1} = 46\text{ A } e^{j(-36.87)^\circ} \quad (\text{Exponentialform})$$

$$\underline{I}_{L2} = 46\text{ A } e^{j(+36.87-120)^\circ}$$

$$\underline{I}_{L3} = 46\text{ A } e^{j(-240)^\circ}$$

$$\underline{I}_{L1} = (36.8 - j27.6)\text{ A} \quad (\text{Komponentenform})$$

$$\underline{I}_{L2} = (5.5 - j45.67)\text{ A}$$

$$\underline{I}_{L3} = (-23 + j39.84)\text{ A}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = (19.3 - j33.43)\text{ A} = 38.6\text{ A } e^{j(-60)^\circ}$$

8 Übungsaufgaben

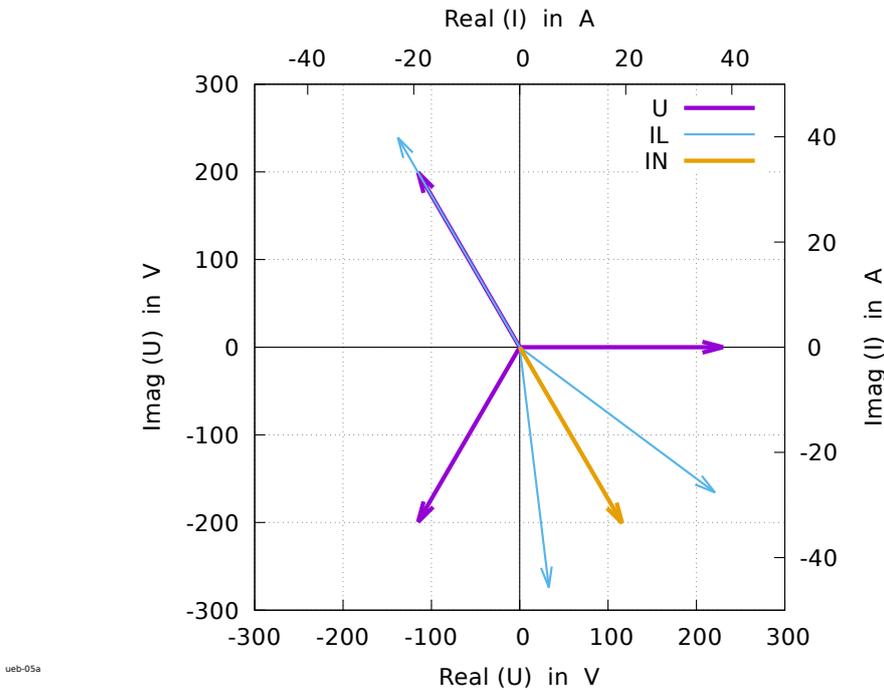


Abb. 78: Zeigerdiagramm der vier Leiterströme

3. Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der 4 Ströme.
siehe Abb. 78
4. Wie groß sind die Wirkleistungen der drei Einzellasten und wie groß ist die gesamte Wirkleistung?

$$P_U = |\underline{U}_U| |\underline{I}_{L1}| \cos \varphi_{Z1} = 230 \text{ V } 46 \text{ A } \cos(+36.87^\circ) = 8.464 \text{ kW}$$

$$P_V = |\underline{U}_V| |\underline{I}_{L2}| \cos \varphi_{Z2} = 230 \text{ V } 46 \text{ A } \cos(-36.87^\circ) = 8.464 \text{ kW}$$

$$P_W = |\underline{U}_W| |\underline{I}_{L3}| \cos \varphi_{Z3} = 230 \text{ V } 46 \text{ A } = 10.58 \text{ kW}$$

$$P = P_U + P_V + P_W = 27.508 \text{ kW}$$

5. Wie groß ist die Amplitude der schwingenden Leistung P_S ? Wieviel Prozent der Wirkleistung ist dies?

Hinweis: $P_S = (P_{\max} - P_{\min})/2$

Allgemein gilt für die einphasige Wechselstromleistung:

$$p(t) = U I \left[\underbrace{\cos \varphi}_{\text{s. Aufgabe 4}} - \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}_{\text{schwingende Leistung}} \right]$$

$$p_U(t) = |\underline{U}| |\underline{I}_{L1}| \cos \varphi_{Z1} - |\underline{U}| |\underline{I}_{L1}| \cos(2\omega t - \varphi_{Z1})$$

$$p_V(t) = |\underline{U}| |\underline{I}_{L2}| \cos \varphi_{Z2} - |\underline{U}| |\underline{I}_{L2}| \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi_{Z2})$$

$$p_W(t) = |\underline{U}| |\underline{I}_{L3}| \cos \varphi_{Z3} - |\underline{U}| |\underline{I}_{L3}| \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi_{Z3})$$

8 Übungsaufgaben

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_U(t) + p_V(t) + p_W(t) \\
 &= P + U I \left[-\cos(2\omega t - 36.87^\circ) - \cos(2\omega t - 120^\circ - 120^\circ + 36.87^\circ) \right. \\
 &\quad \left. - \cos(2\omega t - 240^\circ - 240^\circ) \right] \\
 &= P - U I \left[\cos 2\omega t \left\{ \cos(-36.87^\circ) + \cos(-203.13^\circ) + \cos(-480^\circ) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \sin 2\omega t \left\{ \sin(-36.87^\circ) + \sin(-203.13^\circ) + \sin(-480^\circ) \right\} \right] \\
 &= P - 10.58 \text{ kVA} \left[\cos 2\omega t (0.8 - 0.91 - 0.5) - \sin 2\omega t (0.58 - 0.4 + 0.86) \right] \\
 P_S &= 10.58 \text{ kVA} (-0.6 \cos 2\omega t + 1.04 \sin 2\omega t) \\
 &= 10.58 \text{ kVA} \sqrt{(-0.6)^2 + (1.04)^2} = 13.08 \text{ kVA} \\
 \frac{\hat{P}_S}{P} &= 47.7\%
 \end{aligned}$$

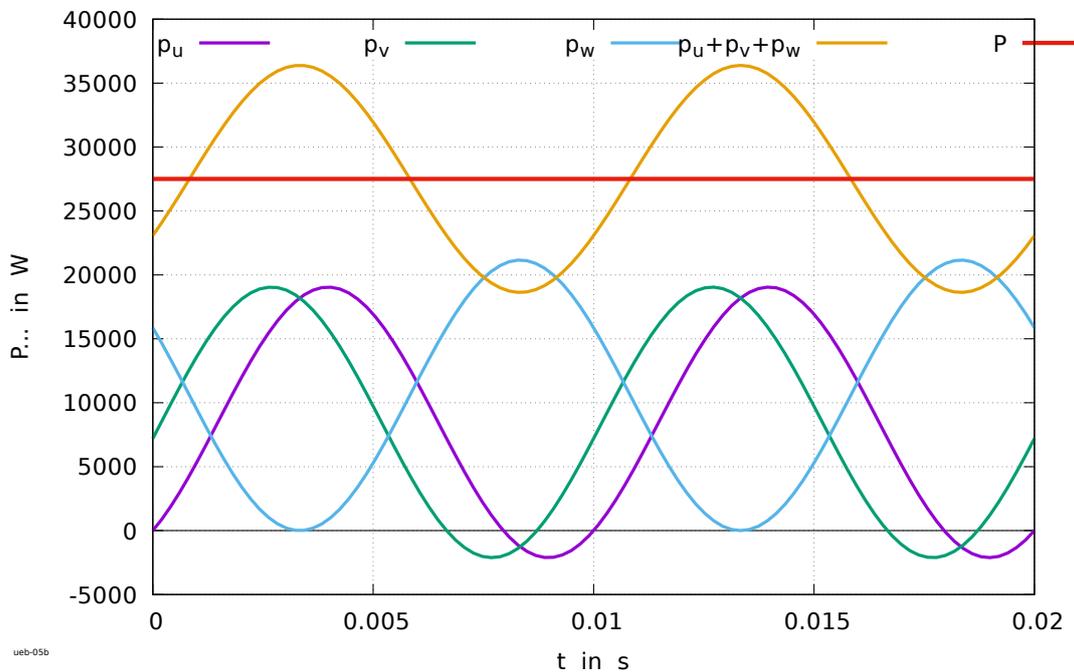


Abb. 79: Schwingende Leistungen

6. Nun wird der Neutraleiter unterbrochen. Welche Sternpunktspannung stellt sich ein?

$$\underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{3N}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Die Glieder $\underline{Y} \underline{U}_{1N}$ usw. sind die Ströme aus Aufgabenteil 1.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{KN} &= \frac{36.8 \text{ A} - j 27.6 \text{ A} + 5.5 \text{ A} - j 45.67 \text{ A} - 23 \text{ A} + j 39.83 \text{ A}}{\frac{1}{4\Omega + j3\Omega} + \frac{1}{4\Omega - j3\Omega} + \frac{1}{5\Omega}} \\
 &= \frac{19.3 \text{ A} - j 33.4 \text{ A}}{\frac{4\Omega - j3\Omega + 4\Omega + j3\Omega + 5\Omega}{(25\Omega)^2}} = 37.11 \text{ V} - j 64.3 \text{ V} = 74.2 \text{ V} e^{j(-60)^\circ}
 \end{aligned}$$

8 Übungsaufgaben

7. Wie groß sind jetzt die Beträge der drei Lastspannungen?

$$\underline{U}_{1K} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{KN} = 192.88 \text{ V} + j 64.3 \text{ V} = 203.3 \text{ V } e^{j(18.43)^\circ}$$

$$\underline{U}_{2K} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{KN} = -152.12 \text{ V} - j 134.9 \text{ V} = 203.3 \text{ V } e^{j(-138.44)^\circ}$$

$$\underline{U}_{3K} = \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{KN} = -152.12 \text{ V} + j 263.84 \text{ V} = 304.2 \text{ V } e^{j(120)^\circ}$$

Es gilt:

$$\underline{U}_{1K} + \underline{U}_{2K} + \underline{U}_{3K} = -3 \underline{U}_{KN}$$

8. Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm aller Spannungen.

siehe Abb. 80

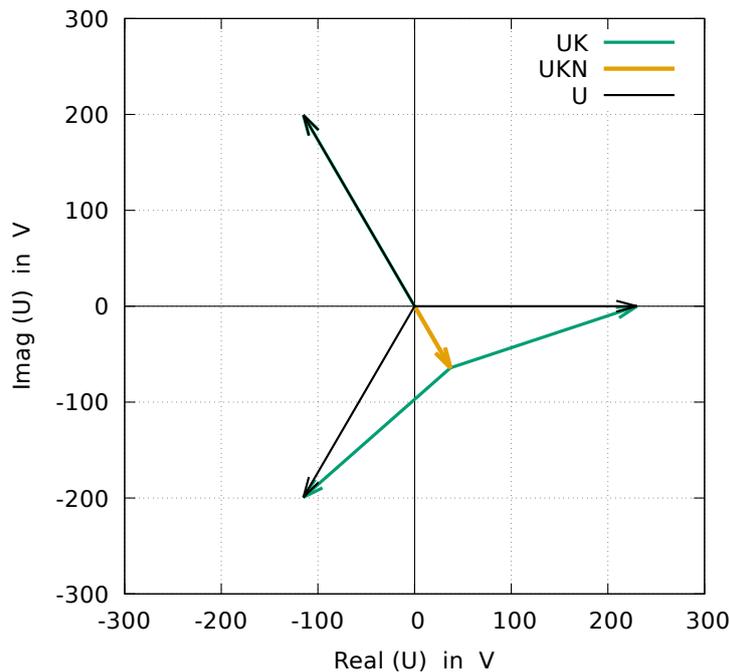


Abb. 80: Zeigerdiagramm der Spannungen

9. Wie groß sind jetzt die Beträge der drei Leiterströme?

$$\underline{I}'_{L1} = \frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{Z}_1} = \frac{203.3 \text{ V } e^{j(18.43)^\circ}}{5 \Omega e^{j(36.9)^\circ}} = 40.66 \text{ A } e^{j(-18.43)^\circ}$$

$$\underline{I}'_{L2} = \frac{\underline{U}_{2K}}{\underline{Z}_2} = \frac{203.3 \text{ V } e^{j(-101.57)^\circ}}{5 \Omega e^{j(-36.9)^\circ}} = 40.66 \text{ A } e^{j(-101.57)^\circ}$$

$$\underline{I}'_{L3} = \frac{\underline{U}_{3K}}{\underline{Z}_3} = \frac{304.2 \text{ V } e^{j(120)^\circ}}{5 \Omega e^{j(0)^\circ}} = 60.85 \text{ A } e^{j(120)^\circ}$$

10. Wie groß sind jetzt die Wirkleistungen der drei Einzellasten und wie groß ist die gesamte

Wirkleistung?

$$P'_1 = U_{1K} I'_{L1} \cos \varphi'_{Z1} = 6.614 \text{ kW}$$

$$P'_2 = U_{2K} I'_{L2} \cos \varphi'_{Z2} = 6.614 \text{ kW}$$

$$P'_3 = U_{3K} I'_{L3} \cos \varphi'_{Z3} = 18.51 \text{ kW}$$

$$P' = P'_1 + P'_2 + P'_3 = 31.74 \text{ kW}$$

11. Nun werden die drei Lastimpedanzen im Dreieck geschaltet (Z_1 an U_{12} , Z_2 an U_{23} , Z_3 an U_{31}). Wie groß sind jetzt die Beträge der drei Lastströme I_{Z1} etc.?

$$\underline{I}_{Z1} = \underline{U}_{12} / \underline{Z}_1 = \sqrt{3} \cdot 230 \text{ V } e^{j(+30)^\circ} / 5 \Omega e^{j(+36.87)^\circ} = 79.67 \text{ A } e^{j(-6.87)^\circ}$$

$$\underline{I}_{Z2} = \underline{U}_{23} / \underline{Z}_2 = \sqrt{3} \cdot 230 \text{ V } e^{j(-90)^\circ} / 5 \Omega e^{j(-36.87)^\circ} = 79.67 \text{ A } e^{j(-53.13)^\circ}$$

$$\underline{I}_{Z3} = \underline{U}_{31} / \underline{Z}_3 = \sqrt{3} \cdot 230 \text{ V } e^{j(-210)^\circ} / 5 \Omega e^{j(0)^\circ} = 79.67 \text{ A } e^{j(-210)^\circ}$$

12. Wie groß sind die Beträge der drei Leiterströme I_{L1} etc.?

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{Z1} - \underline{I}_{Z3} = (79.1 - j9.53 + 69 - j39.83) \text{ A} = (148.1 - j49.37) \text{ A}$$

$$\rightarrow I_{L1} = 156.11 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{Z2} - \underline{I}_{Z1} = (47.8 - j63.74 - 79.1 + j9.53) \text{ A} = (-31.3 - j54.21) \text{ A}$$

$$\rightarrow I_{L2} = 62.6 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{Z3} - \underline{I}_{Z2} = (-69.0 + j39.83 - 47.8 + j63.74) \text{ A} = (-116.8 + j103.58) \text{ A}$$

$$\rightarrow I_{L3} = 156.11 \text{ A}$$

13. Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm aller Ströme.

siehe Abb. 81

GNU PLOT Lösung

Vorgabe:

```
U1={230,0}; U2=U1*a*a; U3=U1*a
Z1={4,3}; Z2={4,-3}; Z3={5,0}
```

Berechnung der Leiterströme \underline{I}_{L1} , etc. und des Neutralleiterstromes \underline{I}_N :

```
IL1=U1/Z1; IL1_versor=versor(IL1)
IL2=U2/Z2; IL2_versor=versor(IL2)
IL3=U3/Z3; IL3_versor=versor(IL3)
IN=IL1+IL2+IL3; IN_versor=versor(IN)
```

```
IL1 = {36.8, -27.6}
IL2 = {5.50230114445051, -45.6697348592673}
IL3 = {-23.0, 39.8371685740842}
IL1_versor = {46.0, -36.869897645844}
IL2_versor = {46.0, -83.130102354156}
IL3_versor = {46.0, 120.0}
IN = {19.3023011444505, -33.4325662851832}
IN_versor = {38.604602288901, -60.0}
```

8 Übungsaufgaben

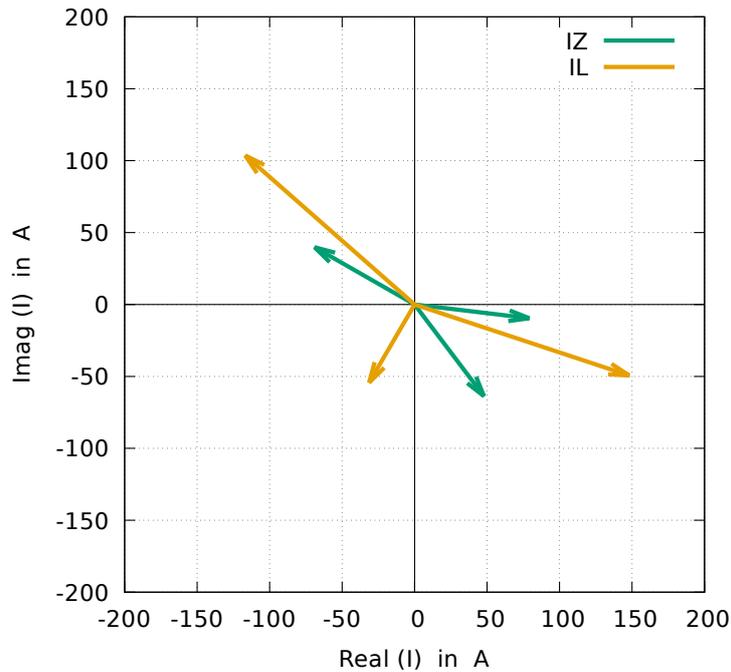


Abb. 81: Zeigerdiagramm der Leiterströme

Berechnung der Einzel- und Gesamtwirkleistungen:

```
S1=U1 * stern(IL1)
S2=U2 * stern(IL2)
S3=U3 * stern(IL3)
P = real(S1)+real(S2)+real(S3)
```

```
S1 = {8464.0, 6348.0}
S2 = {8464.0, -6348.0}
S3 = {10580.0, -3.26849658449646e-13}
P = 27508.0
```

Berechnung der schwingenden Leistung:

```
phi_z1=atan2(imag(Z1),real(Z1))
phi_z2=atan2(imag(Z2),real(Z2))
phi_z3=atan2(imag(Z3),real(Z3))

p1(t)=abs(U1)*abs(IL1)*
      (cos(phi_z1)-cos(2*w*t+(phi_z1)))
p2(t)=abs(U2)*abs(IL2)*
      (cos(phi_z2)-cos(2*w*t+(-4*pi/3.+phi_z2)))
p3(t)=abs(U3)*abs(IL3)*
      (cos(phi_z3)-cos(2*w*t+(-8*pi/3.+phi_z3)))

plot p1(t), p2(t), p3(t), p1(t)+p2(t)+p3(t)
```

8 Übungsaufgaben

Dreileitersystem, Sternschaltung; Berechnung der Sternpunktspannung und der Lastspannungen:

```
Y1=1/Z1;      Y2=1/Z2;      Y3=1/Z3

UKN=(U1*Y1+U2*Y2+U3*Y3)/(Y1+Y2+Y3)
UKN_versor=versor(UKN)

U1K=U1-UKN;   U2K=U2-UKN;   U3K=U3-UKN
```

```
Y1 = {0.16, -0.12}
Y2 = {0.16, 0.12}
Y3 = 0.2
UKN = {37.1198098931741, -64.2933967022753}
UKN_versor = {74.2396197863481, -60.0}
U1K = {192.880190106826, 64.2933967022753}
U2K = {-152.119809893174, -134.892446168146}
U3K = {-152.119809893174, 263.479239572696}
```

Berechnung der Leiterströme:

```
IL1S=U1K/Z1;  IL1S_versor=versor(IL1S)
IL2S=U2K/Z2;  IL2S_versor=versor(IL2S)
IL3S=U3K/Z3;  IL3S_versor=versor(IL3S)
```

```
IL1S = {38.5760380213652, -12.8586793404551}
IL1S_versor = {40.6627144175897, -18.434948822922}
IL2S = {-8.15207604273038, -39.8371685740842}
IL2S_versor = {40.6627144175897, -101.565051177078}
IL3S = {-30.4239619786348, 52.6958479145392}
IL3S_versor = {60.8479239572696, 120.0}
```

Berechnung der Wirkleistungen:

```
S1S=U1K * stern(IL1S)
S2S=U2K * stern(IL2S)
S3S=U3K * stern(IL3S)
PS = real(S1S)+real(S2S)+real(S3S)
```

```
S1S = {6613.82537522584, 4960.36903141938}
S2S = {6613.82537522583, -4960.36903141938}
S3S = {18512.3492495483, 2.45137243837235e-13}
PS = 31740.0
```

Berechnung der Lastströme \underline{I}_Z :

```

U12= U1-U2;          U23=U2-U3;          U31=U3-U1
I12= U12/Z1;        I23=U23/Z2;          I31=U31/Z3
I12_v=versor(I12)
I23_v=versor(I23)
I31_v=versor(I31)

```

```

I12 = {79.1023011444505, -9.53026514073266}
I23 = {47.804602288901, -63.7394697185347}
I31 = {-69.0, 39.8371685740842}
I12_v = {79.6743371481684, -6.86989764584402}
I23_v = {79.6743371481683, -53.130102354156}
I31_v = {79.6743371481683, 150.0}

```

Berechnung der Leiterströme \underline{I}_L :

```

IL1D = I12-I31;    IL2D = I23-I12;    IL3D = I31-I23
IL1D_v=versor(IL1D)
IL2D_v=versor(IL2D)
IL3D_v=versor(IL3D)

```

```

IL1D = {148.102301144451, -49.3674337148168}
IL2D = {-31.2976988555495, -54.209204577802}
IL3D = {-116.804602288901, 103.576638292619}
IL1D_v = {156.113532776209, -18.434948822922}
IL2D_v = {62.595397711099, -120.0}
IL3D_v = {156.113532776209, 138.434948822922}

```

8.9 Unsymmetrische Belastung eines Drehstromnetzes

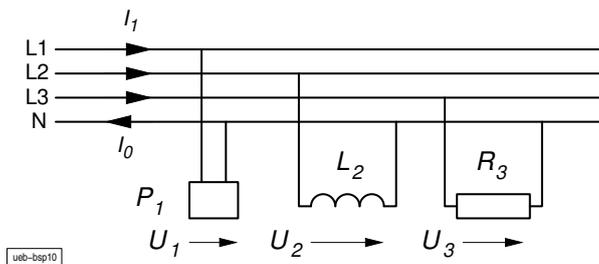


Abb. 82: Drehstromnetz mit einphasigen Verbrauchern

Drei einphasige Verbraucher sind an einem Drehstromnetz 380V/50Hz jeweils zwischen einem Außenleiter und dem Neutraleiter angeschlossen.

Daten der Verbraucher: $P_1 = 1.2 \text{ kW}$; $\cos \varphi_1 = 0.8$ ind.; $L_2 = 220 \text{ mH}$; $R_3 = 47 \Omega$.

1. Berechnen Sie die Leiterströme I_1, I_2, I_3 .

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1 \cos \varphi_1} = \frac{1200 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot 0.8} = 6.82 \text{ A}$$

8 Übungsaufgaben

$$I_2 = \frac{U_2}{\omega L_2} = \frac{220 \text{ VAs}}{314 \cdot 0.22 \text{ Vs}} = 3.18 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{220 \text{ V}}{47 \Omega} = 4.68 \text{ A}$$

2. Berechnen Sie die Wirk-, Blind- und Scheinleistung, die dem Netz entnommen wird.

$$P_1 = 1200 \text{ W}$$

$$P_2 = 0$$

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = 1030 \text{ W}$$

$$P = 2230 \text{ W}$$

$$Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 = 1200 \text{ W} \cdot 0.75 = 900 \text{ var}$$

$$Q_2 = U_2 I_2 = \frac{U_2^2}{\omega L} = \frac{(220 \text{ V})^2 \text{ As}}{2\pi \cdot 50 \cdot 0.22 \text{ Vs}} = 700 \text{ var}$$

$$Q_3 = 0$$

$$Q = 1600 \text{ var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 2744 \text{ VA}$$

3. Berechnen Sie den Neutralleiterstrom I_0 .

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_1 = (6.82 \cdot 0.8 - j 6.82 \cdot 0.6) \text{ A} = (5.45 - j 4.09) \text{ A} = 6.82 \text{ A} \angle -36.9^\circ$$

$$\underline{a}^2 = -0.5 - j 0.866$$

$$\underline{I}_2 = -j I_2 \underline{a}^2 = (-j 3.18 (-0.5) - 3.18 \cdot 0.866) \text{ A} = (-2.75 + j 1.59) \text{ A} = 3.18 \text{ A} \angle -210^\circ$$

$$\underline{a} = -0.5 + j 0.866$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \underline{a} = (4.68 (-0.5) + j 0.866) \text{ A} = (-2.34 + j 4.05) \text{ A} = 4.68 \text{ A} \angle -240^\circ$$

$$\sum \underline{I}_i = (0.36 + j 1.55) \text{ A} = 1.59 \text{ A} \angle 77^\circ = \underline{I}_0$$

4. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für alle Ströme und Spannungen.

siehe Abb. 83

8 Übungsaufgaben

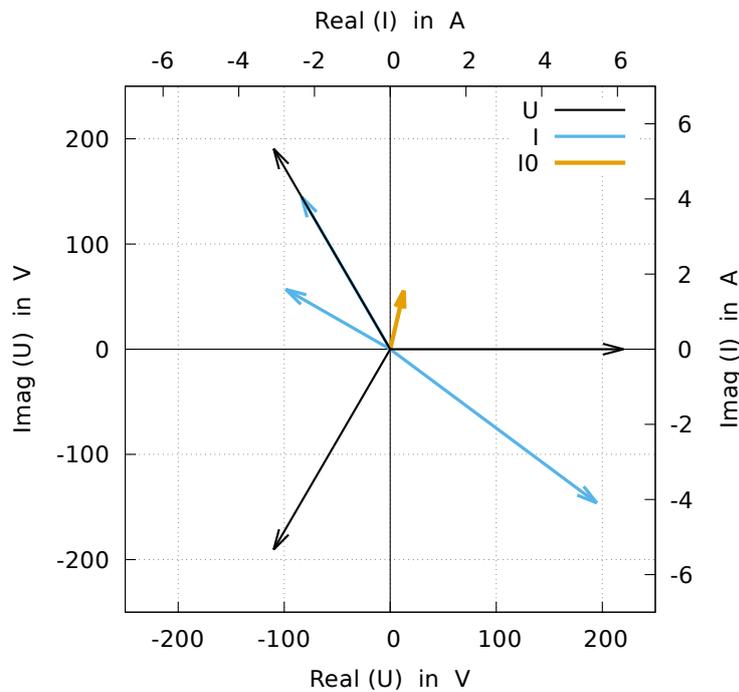


Abb. 83: Zeigerdiagramm bei unsymmetrischer Belastung

GNU PLOT Lösung

Vorgaben:

```
U1={220,0};    U2=U1*a*a;    U3=U1*a
```

Berechnung der Impedanzen:

```
P1=1200 ;    phi1=acos(0.8);    Q1=P1*tan(phi1)
S1=P1+j*Q1;    Z1_stern=U1*U1/S1
Z1=real(Z1_stern)-j*imag(Z1_stern)

L2=0.22;    Z2=0+j*w*L2;    Z3=47
```

```
P1 = 1200
phi1 = 0.643501108793284
Q1 = 900.0
S1 = {1200.0, 900.0}
Z1_stern = {25.8133333333333, -19.36}
Z1 = {25.8133333333333, 19.36}
L2 = 0.22
Z2 = {0.0, 69.1150383789755}
Z3 = 47
```

Berechnung der Leiterströme:

```

I1=U1/Z1;   I1_versor=versor(I1)
I2=U2/Z2;   I2_versor=versor(I2)
I3=U3/Z3;   I3_versor=versor(I3)

```

```

I1 = {5.45454545454545, -4.09090909090909}
I1_versor = {6.81818181818182, -36.869897645844}
I2 = {-2.75664447710896, 1.59154943091895}
I2_versor = {3.18309886183791, 150.0}
I3 = {-2.34042553191489, 4.05373593260801}
I3_versor = {4.68085106382979, 120.0}

```

Berechnung der Leistungen und des Neutralleiterstromes:

```

S2=U2*stern(I2)
S3=U3*stern(I3)
S=S1+S2+S3
S_versor=versor(S)

I0=I1+I2+I3
I0_versor=versor(I0)

```

```

S2 = {1.26842980563424e-14, 700.281749604339}
S3 = {1029.78723404255, -5.05706587716759e-14}
S = {2229.78723404255, 1600.28174960434}
S_versor = {2744.60430430615, 35.6663837910966}
I0 = {0.3574754455216, 1.55437627261787}
I0_versor = {1.59495275510853, 77.0483241716793}

```

8.10 Unsymmetrisches Vierleitersystem

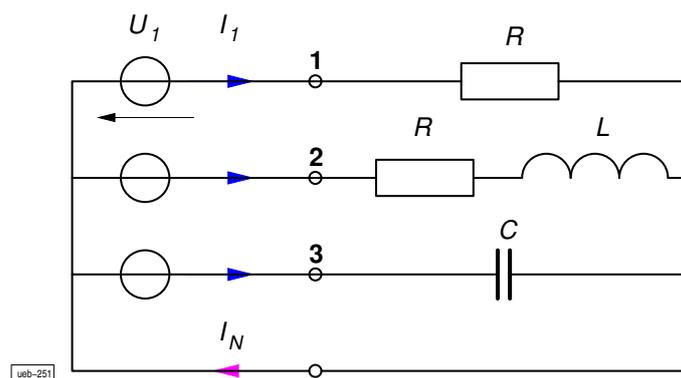


Abb. 84: Unsymmetrisches Vierleitersystem

Gegeben sind: $U_1 = U_2 = U_3 = 200 \text{ V}$; $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 100 \Omega$; 50 Hz (Abb. 84).

8 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ und \underline{I}_N .

$$\underline{U}_1 = 200 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_R = 100 \Omega$$

$$\underline{U}_2 = \underline{a}^2 \underline{U}_1$$

$$\underline{Z}_L = j100 \Omega$$

$$\underline{U}_3 = \underline{a} \underline{U}_1$$

$$\underline{Z}_C = -j100 \Omega$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_R} = 2 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L)} = (-1.367 - j0.366) \text{ A} = 1.414 \angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_C} = (-1.732 - j1.0) \text{ A} = 2.0 \angle -150^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (-1.098 - j1.366) \text{ A} = 1.75 \angle -128.8^\circ \text{ A}$$

2. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme.

siehe Abb. 85

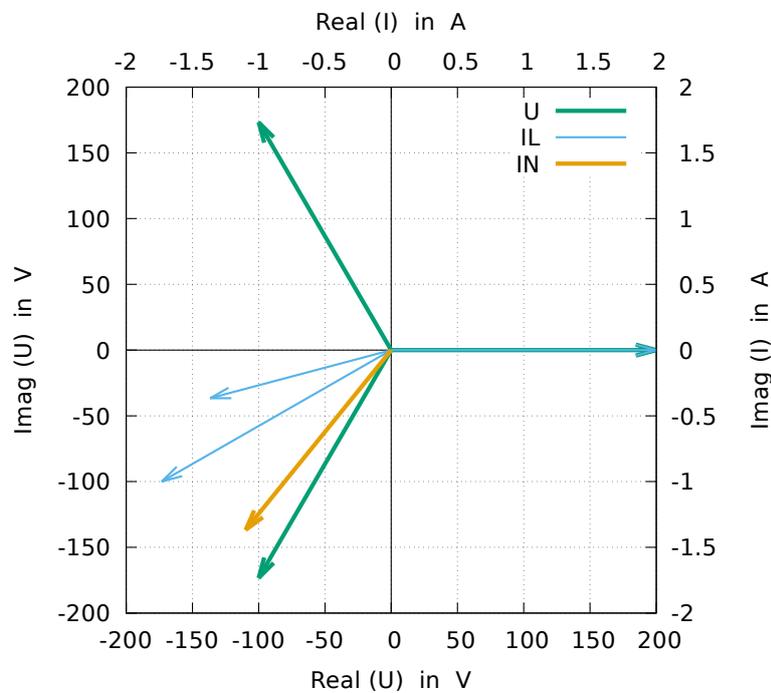


Abb. 85: Zeigerdiagramm zu Aufgabe 8.10

GNU PLOT Lösung

```

U1=200;           U2=U1*a*a;           U3=U1*a
ZR=100;          ZL=j*100;           ZC=-j*100
I1=U1/ZR;        I2=U2/(ZR+ZL);       I3=U3/ZC
IN=I1+I2+I3
    
```

8 Übungsaufgaben

```
ZR = 100
ZL = {0.0, 100.0}
ZC = {-0.0, -100.0}
I1 = 2
I2 = {-1.36602540378444, -0.366025403784439}
I3 = {-1.73205080756888, -1.0}
IN = {-1.09807621135332, -1.36602540378444}
I1V = 2.0
I2V = {1.41421356237309, -165.0}
I3V = {2.0, -150.0}
INV = {1.75265420711688, -128.793976886997}
```

SCEPTRE Lösung

```
ELEMENTS
  E1, N-1 = (200,0)
  E2, N-2 = (200,-120)
  E3, N-3 = (200,+120)
  R1, 1-K = 100
  L2, 2-2a = 0.3183
  R2, 2a-K = 100
  C3, 3-K = 3.1831E-5
  RKN, K - N = 1E-6
OUTPUTS
  E1, E2, E3, IR1, IL2, VL2, VR2, IC3, IRKN
RUN CONTROLS
  RUN AC, FREQUENCY = 50
```

Der Shunt-Widerstand RKN dient zum Messen des Neutralleiterstromes IRKN.

```
FREQ                                5.00000E+01
E1 (COMPLEX)  2.00000E+02  0.00000E+00
E2 (COMPLEX) -1.00000E+02 -1.73205E+02
E3 (COMPLEX) -1.00000E+02  1.73205E+02
IR1 (COMPLEX) 2.00000E+00  1.36605E-08
IL2 (COMPLEX) -1.36604E+00 -3.66052E-01
VL2 (COMPLEX)  3.66041E+01 -1.36600E+02
VR2 (COMPLEX) -1.36604E+02 -3.66052E+01
IC3 (COMPLEX) -1.73205E+00 -1.00000E+00
IRKN (COMPLEX) -1.09809E+00 -1.36605E+00
```

8.11 Unsymmetrisches Dreileitersystem

Daten wie bei Aufgabe 8.10 (Abb. 86).

1. Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ und die Spannungen $\underline{U}_{1K}, \underline{U}_{2K}, \underline{U}_{3K}, \underline{U}_{KN}$.

8 Übungsaufgaben

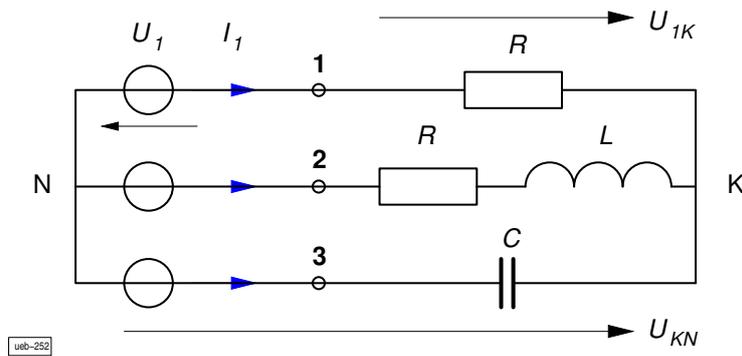


Abb. 86: Unsymmetrisches Dreileitersystem

Die Berechnungen von $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, \underline{Z}_R, \underline{Z}_L, \underline{Z}_C$ sind identisch mit denen der Aufgabe 8.10. Die Sternpunktspannung \underline{U}_{KN} errechnet sich aus Gleichung (3), Seite 26.

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_R} = 0.01 \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L)} = (0.005 - j0.005) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_C} = j0.01 \text{ S}$$

$$\underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = (-93.2 - j60) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{1K} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{KN} = (293.2 + j60) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2K} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{KN} = (-6.8 - j113.2) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{3K} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{KN} = (-6.8 + j233.2) \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{1K} \underline{Y}_1 = (2.93 + j0.6) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{2K} \underline{Y}_2 = (-0.6 - j0.532) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{3K} \underline{Y}_3 = (-2.33 - j0.068) \text{ A}$$

2. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme.

siehe Abb. 87

GNU PLOT Lösung

```

Y1=1./ZR;          Y2=1./(ZR+ZL);      Y3=1./ZC
UKN=(U1*Y1+U2*Y2+U3*Y3)/(Y1+Y2+Y3)
U1K=U1-UKN;        U2K=U2-UKN;        U3K=U3-UKN
IL1=U1K*Y1;        IL2=U2K*Y2;        IL3=U3K*Y3
    
```

8 Übungsaufgaben

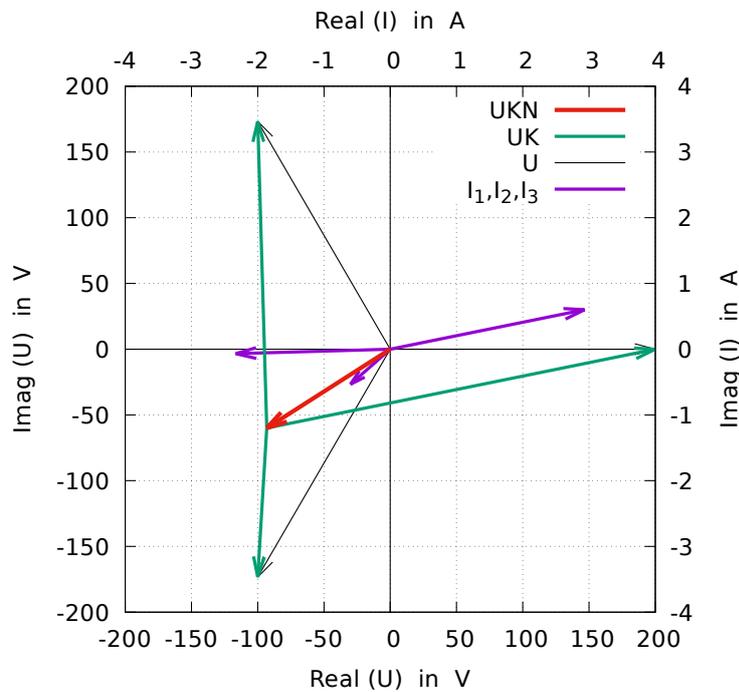


Abb. 87: Zeigerdiagramm zum unsymmetrischen Dreileitersystem

```

ZR = 100
ZL = {0.0, 100.0}
ZC = {-0.0, -100.0}
Y1 = 0.01
Y2 = {0.005, -0.005}
Y3 = {-0.0, 0.01}
UKN = {-93.2050807568877, -60.0}
U1K = {293.205080756888, 60.0}
U2K = {-6.79491924311226, -113.205080756888}
U3K = {-6.79491924311228, 233.205080756888}
IL1 = {2.93205080756888, 0.6}
IL2 = {-0.6, -0.532050807568877}
IL3 = {-2.33205080756888, -0.0679491924311228}
    
```

SCEPTRE Lösung

```

ELEMENTS
  E1, N-1 = (200,0)
  E2, N-2 = (200,-120)
  E3, N-3 = (200,+120)
  R1, 1-K = 100
  L2, 2-2a = 0.3183
  R2, 2a-K = 100
  C3, 3-K = 3.183E-5
; Spannungsmesser
  J2, 2-K = 0
    
```

JKN, K-N = 0
 OUTPUTS
 E1, E2, E3, IR1, IL2, IC3, VR1, VJ2, VC3, VJKN

Die Nullstromquellen J2 und JKN dienen zur Spannungsmessung (VJ2, VJKN).

FREQ		5.00000E+01	
E1	(COMPLEX)	2.00000E+02	0.00000E+00
E2	(COMPLEX)	-1.00000E+02	-1.73200E+02
E3	(COMPLEX)	-1.00000E+02	1.73200E+02
IR1	(COMPLEX)	2.93196E+00	6.00024E-01
IL2	(COMPLEX)	-6.00009E-01	-5.31986E-01
IC3	(COMPLEX)	-2.33195E+00	-6.80376E-02
VR1	(COMPLEX)	2.93196E+02	6.00024E+01
VJ2	(COMPLEX)	-6.80397E+00	-1.13198E+02
VC3	(COMPLEX)	-6.80397E+00	2.33202E+02
VJKN	(COMPLEX)	-9.31960E+01	-6.00024E+01

8.12 Unsymmetrisches Vierleitersystem mit Widerstand im Neutralleiter

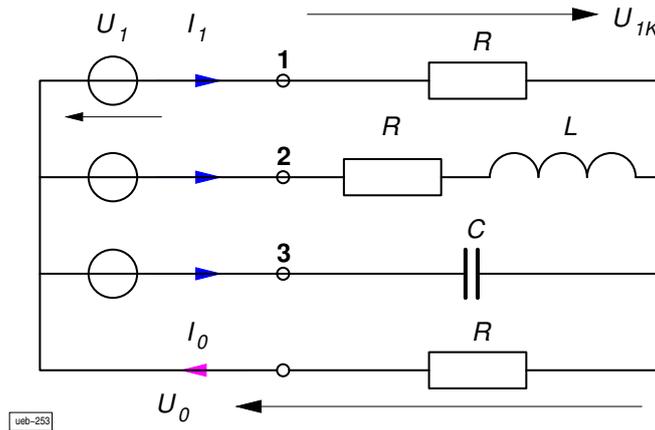


Abb. 88: Unsymmetrisches Vierleitersystem

Daten wie bei Aufgabe 8.10.

1. Berechnen Sie alle Ströme und Spannungen.

Die Berechnung erfolgt wie die Herleitung der Gleichung (3), jedoch mit folgenden Änderungen:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0 = \underline{U}_0 \underline{Y}_0$$

Weiterhin ergibt sich daraus:

$$\underline{Y}_1 (\underline{U}_1 - \underline{U}_0) + \underline{Y}_2 (\underline{U}_2 - \underline{U}_0) + \underline{Y}_3 (\underline{U}_3 - \underline{U}_0) = \underline{U}_0 \underline{Y}_0$$

$$\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3 = \underline{U}_0 (\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

Daraus erhält man die leicht modifizierte Gleichung (3)

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3}{\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerte erhält man

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0} = 0.01 \text{ S}$$

$$\underline{U}_0 = (-52.7 - j 44.09) \text{ V}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_0 \underline{Y}_0 = (-0.53 - j 0.44) \text{ A}$$

$$\underline{U}_{1K} = \underline{U}_1 - \underline{U}_0 = (252.7 + j 44.1) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2K} = \underline{U}_2 - \underline{U}_0 = (-47.26 - j 129.1) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{3K} = \underline{U}_3 - \underline{U}_0 = (-47.26 + j 219.3) \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{1K} \underline{Y}_1 = (2.53 + j 0.441) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{2K} \underline{Y}_2 = (-0.88 - j 0.41) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{3K} \underline{Y}_3 = (-2.17 - j 0.472) \text{ A}$$

2. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm aller Spannungen.

siehe Abb. 89

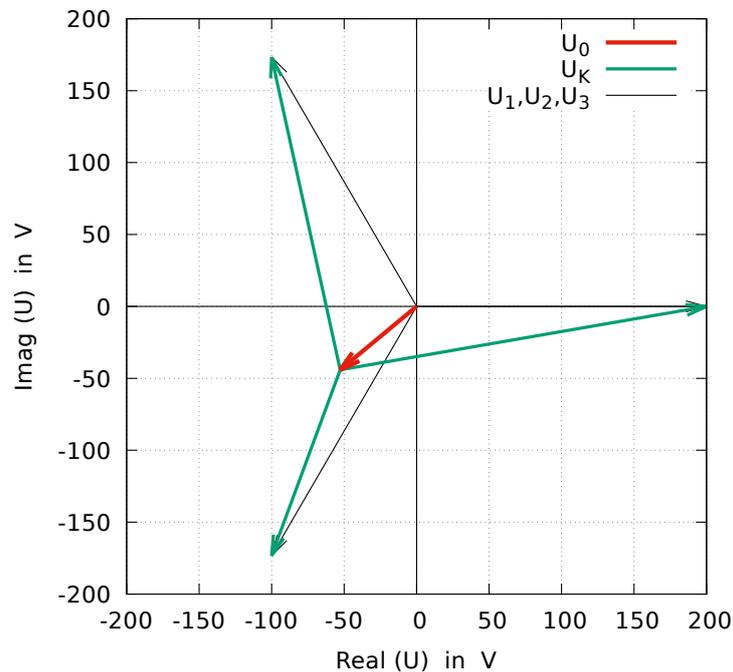


Abb. 89: Zeigerdiagramm zum unsymmetrischen Vierleitersystem

GNU PLOT Lösung

```
Z0=100.
Y0=1./Z0
U0=(U1*Y1+U2*Y2+U3*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Y0)
I0=U0*Y0

U1K=U1-U0;      U2K=U2-U0;      U3K=U3-U0
IL1=U1K*Y1;     IL2=U2K*Y2;     IL3=U3K*Y3
```

```
Z0 = 100
Y1 = 0.01
Y2 = {0.005, -0.005}
Y3 = {-0.0, 0.01}
Y0 = 0.01
U0 = {-52.7415881580847, -44.0926985197606}
I0 = {-0.527415881580848, -0.440926985197606}
U1K = {252.741588158085, 44.0926985197606}
U2K = {-47.2584118419152, -129.112382237127}
U3K = {-47.2584118419153, 217.297779276648}
IL1 = {2.52741588158085, 0.440926985197606}
IL2 = {-0.881853970395212, -0.409269851976059}
IL3 = {-2.17297779276648, -0.472584118419153}
```

SCEPTRE Lösung

```
ELEMENTS
  E1, N-1 = (200,0.)
  E2, N-2 = (200,-120)
  E3, N-3 = (200,+120)
  R1, 1-K = 100
  L2, 2-2a = 0.3183
  R2, 2a-K = 100
  C3, 3-K = 3.1831E-5
  RKN, K-N = 100
  J2, 2-K = 0 ; zum Spannungsmessen
OUTPUTS
  E1, E2, E3, IR1, IL2, VL2, VR2, VJ2, IC3, IRKN, VRKN
```

```
FREQ                5.00000E+01
E1 (COMPLEX)        2.00000E+02  0.00000E+00
E2 (COMPLEX)       -1.00000E+02 -1.73205E+02
E3 (COMPLEX)       -1.00000E+02  1.73205E+02
IR1 (COMPLEX)       2.52742E+00  4.40934E-01
IL2 (COMPLEX)      -8.81855E-01 -4.09289E-01
VL2 (COMPLEX)       4.09276E+01 -8.81828E+01
VR2 (COMPLEX)      -8.81855E+01 -4.09289E+01
```

VJ2	(COMPLEX)	-4.72579E+01	-1.29112E+02
IC3	(COMPLEX)	-2.17299E+00	-4.72580E-01
IRKN	(COMPLEX)	-5.27421E-01	-4.40934E-01
VRKN	(COMPLEX)	-5.27421E+01	-4.40934E+01

8.13 Umwandlung Einphasen- nach Dreiphasensystem

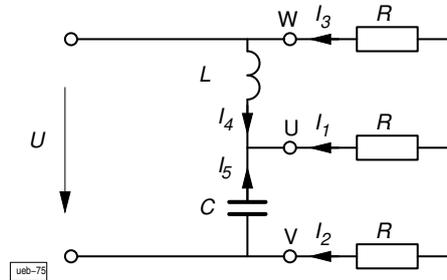


Abb. 90: Umwandlung einphasig nach dreiphasig

Gegeben ist die Schaltung nach Abb. 90 mit folgenden Werten:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = X; \quad X = \sqrt{3} R.$$

Gespeist wird die Schaltung durch die einphasige Spannung U . Beweisen Sie, dass die drei Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und \underline{I}_3 ein symmetrisches Dreiphasensystem bilden.

Hinweis: Drücken Sie die Ströme \underline{I}_2 und \underline{I}_3 durch den Strom \underline{I}_1 aus.

$$\underline{I}_1 = -(\underline{I}_4 + \underline{I}_5) = -(\underline{I}_2 + \underline{I}_3)$$

$$\underline{U} = R(\underline{I}_2 - \underline{I}_3) = jX \underline{I}_4 - (-jX) \underline{I}_5 = jX(\underline{I}_4 + \underline{I}_5) = -jX \underline{I}_1$$

$$-jX \underline{I}_1 = R(\underline{I}_2 - \underline{I}_3)$$

$$\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = -j \frac{X}{R} \underline{I}_1 = -j \frac{\sqrt{3} R}{R} \underline{I}_1 = -j \sqrt{3} \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 - \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_2 + \underline{I}_2 + \underline{I}_1 = -j \sqrt{3} \underline{I}_1 = \underline{I}_1 + 2 \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{2} (-j \sqrt{3} - 1) \underline{I}_1 = \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \underline{I}_1 = \underline{a}^2 \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = -j \sqrt{3} \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_3 - \underline{I}_1$$

$$-\underline{I}_3 - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = -j \sqrt{3} \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_3 = \frac{1}{2} (-\underline{I}_1 + j \sqrt{3} \underline{I}_1) = \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \underline{I}_1 = \underline{a} \underline{I}_1$$

8.14 Grundlagen Symmetrische Komponenten

Gegeben sind folgende Ströme:

$$\underline{I}_1 = (4.6 + j2.8) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = (1.6 - j2.3) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = (-1.8 - j1.7) \text{ A}$$

- Bestimmen und zeichnen Sie die Komponenten des Mit-, Gegen- und Nullsystems.

– Nullsystem

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = (1.466 - j0.4) \text{ A}$$

siehe Abb. 91

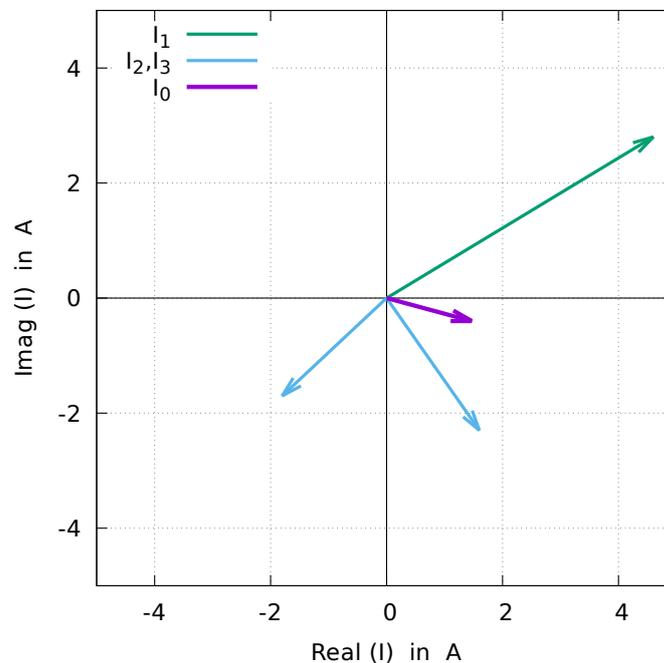


Abb. 91: Nullsystem

– Mitsystem

$$\underline{I}_1 = (4.6 + j2.8) \text{ A}$$

$$\underline{a} \underline{I}_2 = (1.19 + j2.54) \text{ A}$$

$$\underline{a}^2 \underline{I}_3 = (-0.57 + j2.4) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{m1} = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a} \underline{I}_2 + \underline{a}^2 \underline{I}_3) = (1.74 + j2.58) \text{ A}$$

siehe Abb. 92

8 Übungsaufgaben

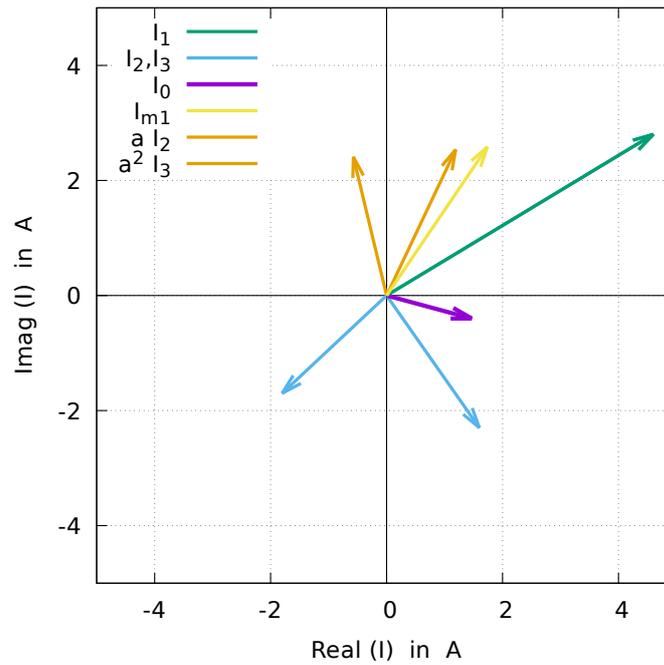


Abb. 92: Null-, Mitsystem

– Gegensystem

$$\underline{I}_1 = (4.6 + j2.8) \text{ A}$$

$$\underline{a}^2 \underline{I}_2 = (-2.79 - j0.24) \text{ A}$$

$$\underline{a} \underline{I}_3 = (2.37 - j0.71) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{g1} = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a}^2 \underline{I}_2 + \underline{a} \underline{I}_3) = (1.39 + j0.62) \text{ A}$$

siehe Abb. 93

- Verifizieren Sie die Ergebnisse.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_{1m} + \underline{I}_{1g} = (4.6 + j2.8) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_{1m} + \underline{a} \underline{I}_{1g} = (1.6 - j2.3) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_0 + \underline{a} \underline{I}_{1m} + \underline{a}^2 \underline{I}_{1g} = (-1.8 - j1.7) \text{ A}$$

GNU PLOT Anweisungen

```
I1={4.6,2.8}
I2={1.6,-2.3}
I3={-1.8,-1.7}
```

```
I0=(I1+I2+I3)/3.
Im=(I1+a*I2+a*a*I3)/3.
Ig=(I1+a*a*I2+a*I3)/3.
```

8 Übungsaufgaben

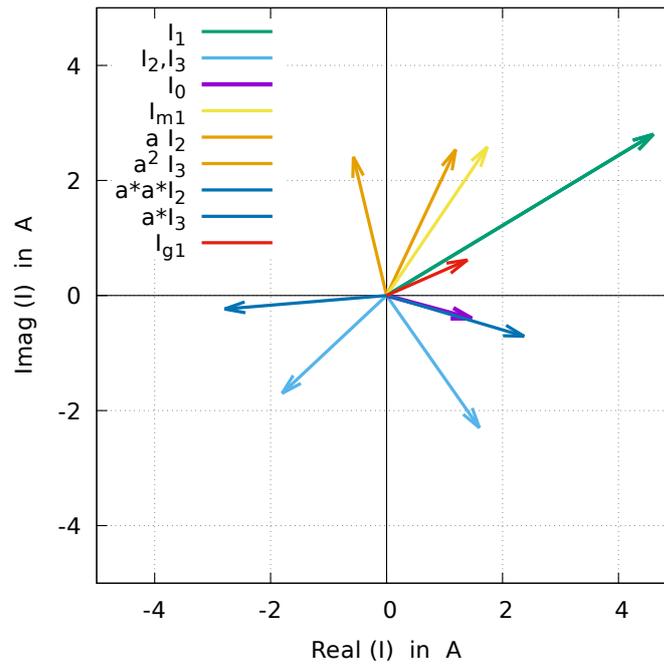


Abb. 93: Null-, Mit-, Gegensystem

$$\begin{aligned}
 I_{1s} &= I_0 + I_m + I_g \\
 I_{2s} &= I_0 + a^2 I_m + a I_g \\
 I_{3s} &= I_0 + a I_m + a^2 I_g
 \end{aligned}$$

8.15 Symmetrische Komponenten

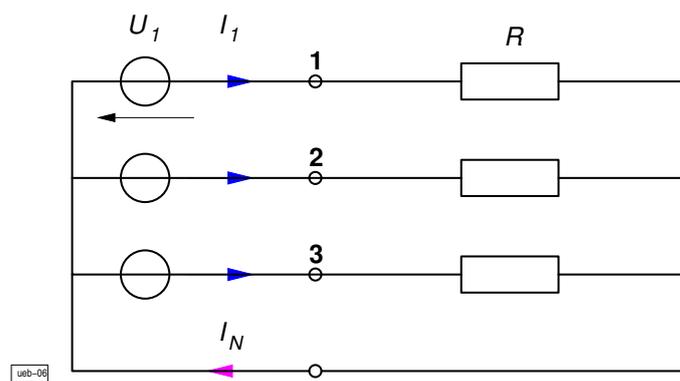


Abb. 94: Symmetrische Komponenten

Eine im Stern geschaltete Drehspannungsquelle mit $U_1 = 230 \text{ V}$ und der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ speist eine ebenfalls in Stern geschaltete, symmetrische Last mit der rein ohmschen Impedanz $R = 10 \Omega$ je Strang. Ein Neutraleiter ist vorhanden.

8 Übungsaufgaben

1. Geben Sie die komplexen Effektivwerte der Ströme in den Außenleitern und im Neutralleiter an.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R} = \frac{230 \text{ V}}{10 \Omega} = 23 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{a}^2 \underline{I}_1 = 23 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{a} \underline{I}_1 = 23 \angle -240^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \text{ A}$$

2. Berechnen Sie zu dieser Schaltung die komplexen Effektivwerte der Mitkomponente \underline{I}_m , der Gegenkomponente \underline{I}_g und der Nullkomponente \underline{I}_0 .

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a} \underline{I}_2 + \underline{a}^2 \underline{I}_3) \\ &= \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle (-120+120)^\circ + 23 \angle (-240+240)^\circ) \text{ A} = 23 \angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_g &= \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a}^2 \underline{I}_2 + \underline{a} \underline{I}_3) \\ &= \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle (-120+240)^\circ + 23 \angle (-240+120)^\circ) \text{ A} = 0 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 &= \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) \\ &= \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle -120^\circ + 23 \angle -240^\circ) \text{ A} = 0 \text{ A} \end{aligned}$$

3. Durch einen Leitungsfehler wird der Leiter L3 unterbrochen.

Geben Sie für diese Situation wiederum die komplexen Effektivwerte der Außenleiterströme und des Neutralleiterstromes an.

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}_1$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_2$$

$$\underline{I}'_3 = 0$$

$$\underline{I}'_N = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 = (23 \angle 0^\circ + 23 \angle -120^\circ) \text{ A} = 23 \angle -60^\circ \text{ A} = -\underline{I}_3$$

4. Berechnen Sie die komplexen Effektivwerte der Mitkomponente \underline{I}'_m , der Gegenkomponente \underline{I}'_g und der Nullkomponente \underline{I}'_0 des gestörten Systems.

$$\underline{I}'_m = \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle (-120+120)^\circ + 0) \text{ A} = 15.33 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}'_g = \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle (-120+240)^\circ + 0) \text{ A} = 7.66 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}'_0 = \frac{1}{3} (23 \angle 0^\circ + 23 \angle -120^\circ + 0) \text{ A} = 7.66 \angle -60^\circ \text{ A}$$

8 Übungsaufgaben

5. Wie groß sind die Mit-, Gegen- und Nullkomponenten der Ströme des gestörten Systems bezogen auf die Mitkomponente des ungestörten Systems?

$$\frac{I'_m}{I_m} = \frac{15.33}{23} = 0.66 \dots$$

$$\frac{I'_g}{I_m} = \frac{7.66 \dots}{23} = 0.33 \dots$$

$$\frac{I'_0}{I_m} = \frac{7.66 \dots}{23} = 0.33 \dots$$

6. Wie groß sind die Mit-, Gegen- und Nullkomponenten der Lastspannungen des gestörten Systems?

$$\underline{U}'_m = \frac{1}{3} (230 \angle 0^\circ + 230 \angle (-120+120)^\circ + 0) \text{ V} = 153.3 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}'_g = \frac{1}{3} (230 \angle 0^\circ + 230 \angle (-120+240)^\circ + 0) \text{ V} = 76.6 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}'_0 = \frac{1}{3} (230 \angle 0^\circ + 230 \angle -120^\circ + 0) \text{ V} = 76.6 \angle -60^\circ \text{ V}$$

7. Berechnen Sie für den gestörten Fall die Mit-, Gegen- und die Nullimpedanz der Last. Es gilt: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R = \underline{Z}$.

Peppel: Alle drei Impedanzen sind $\underline{Z}_m = \underline{Z}_g = \underline{Z}_0 = R$. Wegen der Sternschaltung mit N-Leiter gilt trotz des Fehlers nach wie vor in jeder Phase $\underline{I}_{LX} = \underline{U}_{XN}/R$. Das ist eine Besonderheit der Schaltung und des Fehlers. (s. Originalübung Peppel)

GNU PLOT Lösung

Ströme in den Außenleitern und im Neutralleiter:

```

U1={230,0};          U2=U1*a*a;          U3=U1*a
R=10
Z1=R;                Z2=R;                Z3=R
IL1=U1/Z1;           IL2=U2/Z2;           IL3=U3/Z2
IN=IL1+IL2+IL3
    
```

```

IL1 (versor)=23.0
IL2 (versor)={23.0, -120.0}
IL3 (versor)={23.0, 120.0}
IN (versor)=1.77635683940025e-15
    
```

Mitkomponente \underline{I}_m , Gegenkomponente \underline{I}_g und Nullkomponente \underline{I}_0 :

```

IM=1./3.*(IL1+a*IL2+a*a*IL3)
IG=1./3.*(IL1+a*a*IL2+a*IL3)
I0=1./3.*(IL1+IL2+IL3)
    
```

8 Übungsaufgaben

```
IM (versor)={23.0, 3.11429312559969e-15}
IG (versor)={1.32401821506521e-15, -63.434948822922}
IO (versor)=5.9211894646675e-16
```

Neutralleiterstrom:

```
IL3=0
INS=IL1+IL2+IL3
```

```
INS (versor)={23.0, -60.0}
```

Mitkomponente \underline{I}'_m , Gegenkomponente \underline{I}'_g und Nullkomponente \underline{I}'_0 des gestörten Systems:

```
IMS=1./3.*(IL1+a*IL2+a*a*IL3)
IGS=1./3.*(IL1+a*a*IL2+a*IL3)
IOS=1./3.*(IL1+IL2+IL3)
```

```
IMS (versor)={15.3333333333333, 1.50168852147904e-15}
IGS (versor)={7.66666666666666, 60.0}
IOS (versor)={7.66666666666667, -60.0}
```

Verhältnis gestört/ungestört:

```
print 'IMS/IM=',abs(IMS)/abs(IM)
print 'IGS/IM=',abs(IGS)/abs(IM)
print 'IOS/IM=',abs(IOS)/abs(IM)
```

```
IMS/IM=0.666666666666667
IGS/IM=0.333333333333333
IOS/IM=0.333333333333333
```

Lastspannungen des gestörten Systems:

```
U3=0
UMS=1./3.*(U1+a*U2+a*a*U3)
UGS=1./3.*(U1+a*a*U2+a*U3)
UOS=1./3.*(U1+U2+U3)
```

```
UMS (versor)={153.333333333333, 2.00340373685664e-15}
UGS (versor)={76.6666666666666, 60.0}
UOS (versor)={76.6666666666667, -60.0}
```

8.16 Symmetrische Komponenten

Eine im Stern geschaltete Drehspannungsquelle mit $U_1 = 230 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ speist eine unbekannte, in Stern geschaltete Last. Ein Neutralleiter ist vorhanden. Die komplexen Effektivwerte der symmetrischen Komponenten der Lastströme sind:

$$\underline{I}_m = 10 \angle -30^\circ \text{ A} \qquad \underline{I}_g = 4 \angle -30^\circ \text{ A} \qquad \underline{I}_0 = 1 \angle -60^\circ \text{ A}$$

Bestimmen Sie die Lastimpedanzen $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ und \underline{Z}_3 .

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_m + \underline{I}_g + \underline{I}_0 = 10 \angle -30^\circ \text{ A} + 4 \angle -30^\circ \text{ A} + 1 \angle -60^\circ \text{ A} = 14.87 \angle -31.9^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{a}^2 \underline{I}_m + \underline{a} \underline{I}_g + \underline{I}_0 = 10 \angle (-30-120)^\circ \text{ A} + 4 \angle (-30+120)^\circ \text{ A} + 1 \angle -60^\circ \text{ A} = 8.37 \angle -167.1^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{a} \underline{I}_m + \underline{a}^2 \underline{I}_g + \underline{I}_0 = 10 \angle (-30+120)^\circ \text{ A} + 4 \angle (-30-120)^\circ \text{ A} + 1 \angle -60^\circ \text{ A} = 7.725 \angle 112.56^\circ \text{ A}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{230 \angle 0^\circ \text{ V}}{14.87 \angle -31.9^\circ \text{ A}} = 15.46 \angle 31.9^\circ \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{a}^2 \underline{U}_1}{\underline{I}_2} = \frac{230 \angle -120^\circ \text{ V}}{8.37 \angle -167.1^\circ \text{ A}} = 27.48 \angle 47.12^\circ \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{a} \underline{U}_1}{\underline{I}_3} = \frac{230 \angle +120^\circ \text{ V}}{7.725 \angle 112.56^\circ \text{ A}} = 29.77 \angle 7.44^\circ \Omega$$

GNU PLOT Lösung

```
U1=230
```

```
Im=complex(10,-30)
```

```
Ig=complex(4,-30)
```

```
I0=complex(1,-60)
```

```
I1=Im+Ig+I0
```

```
I2=a*a*Im+a*Ig+I0
```

```
I3=a*Im+a*a*Ig+I0
```

```
Z1=U1/I1
```

```
Z2=a*a*U1/I2
```

```
Z3=a*U1/I3
```

```
I1_versor = {14.8744314616043, -31.9263450633314}
```

```
I2_versor = {8.3708898433634, -167.119497041137}
```

```
I3_versor = {7.72525028230874, 112.562440595883}
```

```
Z1_versor = {15.4627758777674, 31.9263450633314}
```

```
Z2_versor = {27.4761709093984, 47.1194970411366}
```

```
Z3_versor = {29.7724981838728, 7.43755940411726}
```

8.17 Symmetrische Komponenten

Gegeben sind die Zeitverläufe der Leiterströme eines unsymmetrisch belasteten Drehstromsystems mit $f = 50$ Hz:

$$i_1(t) = 35 \text{ A } \cos \omega t$$

$$i_2(t) = 20 \text{ A } \cos(\omega t - 80^\circ)$$

$$i_3(t) = 50 \text{ A } \cos(\omega t - 230^\circ)$$

1. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der drei Ströme.

siehe Abb. 95

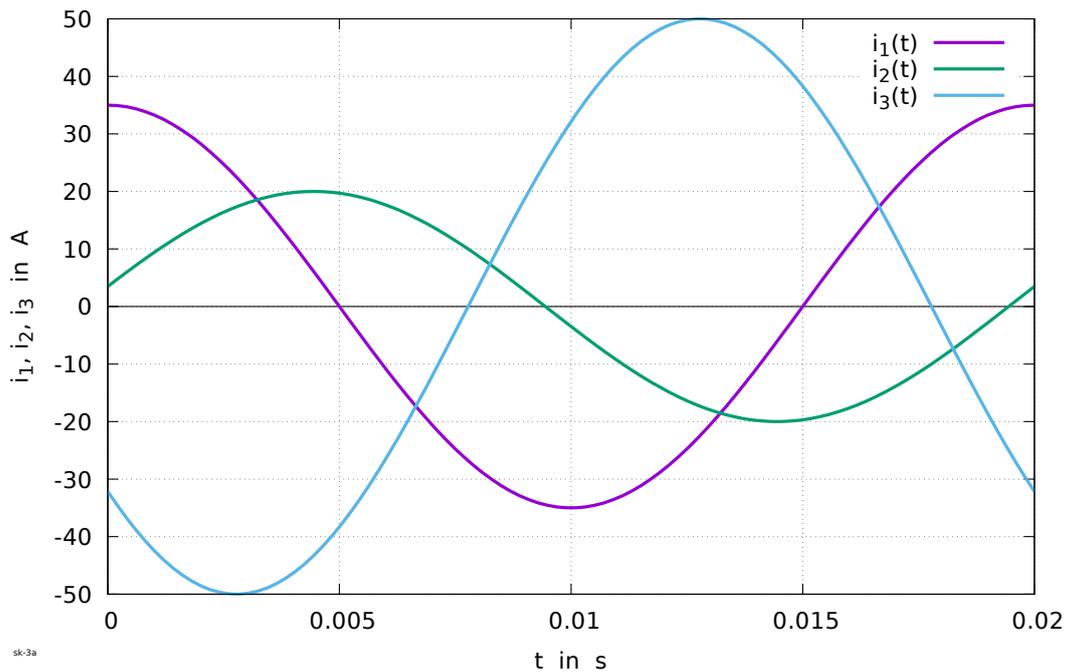


Abb. 95: Zeitverlauf der Leiterströme

2. Berechnen und zeichnen Sie die Komponenten des Null-, Mit- und Gegensystems.

Umwandlung in die komplexe Darstellung:

$$\underline{I}_1 = 35 \text{ A } (\cos(0^\circ) + j \sin(0^\circ)) = 35 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = 20 \text{ A } (\cos(-80^\circ) + j \sin(-80^\circ)) = (3.47 - j 19.7) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = 50 \text{ A } (\cos(-230^\circ) + j \sin(-230^\circ)) = (-32.14 + j 38.3) \text{ A}$$

Für die Nullkomponente ergibt sich:

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = (2.11 + j 6.2) \text{ A} \quad (\text{Abb. 96})$$

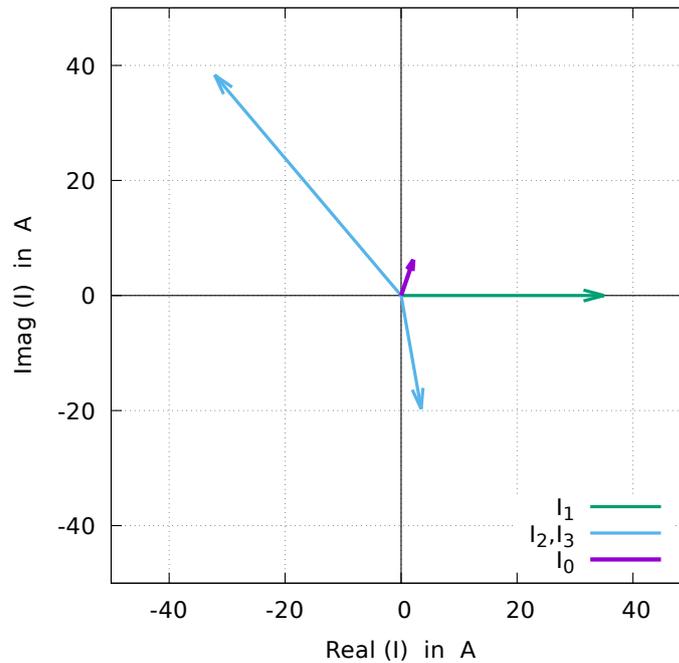


Abb. 96: Nullkomponente

Die Komponente des Mitsystems erhält man aus:

$$\underline{I}_m = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a} \underline{I}_2 + \underline{a}^2 \underline{I}_3) = (33.19 + j 7.18) \text{ A} \quad (\text{Abb. 97})$$

Für die Komponente des Gegensystems gilt:

$$\underline{I}_g = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{a}^2 \underline{I}_2 + \underline{a} \underline{I}_3) = (-0.298 - j 13.38) \text{ A} \quad (\text{Abb. 98})$$

3. Verifizieren Sie die Ergebnisse, in dem Sie wieder die Phasengrößen aus den eben berechneten Komponenten erzeugen.

Es muss gelten:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_m + \underline{I}_g$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_m + \underline{a} \underline{I}_g$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_0 + \underline{a} \underline{I}_m + \underline{a}^2 \underline{I}_g$$

Um den Strom $i_1(t)$ zu erzeugen bildet man:

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\Im(\underline{I}_0)}{\Re(\underline{I}_0)}$$

$$i_0(t) = |\underline{I}_0| \cos(\omega t + \varphi_0)$$

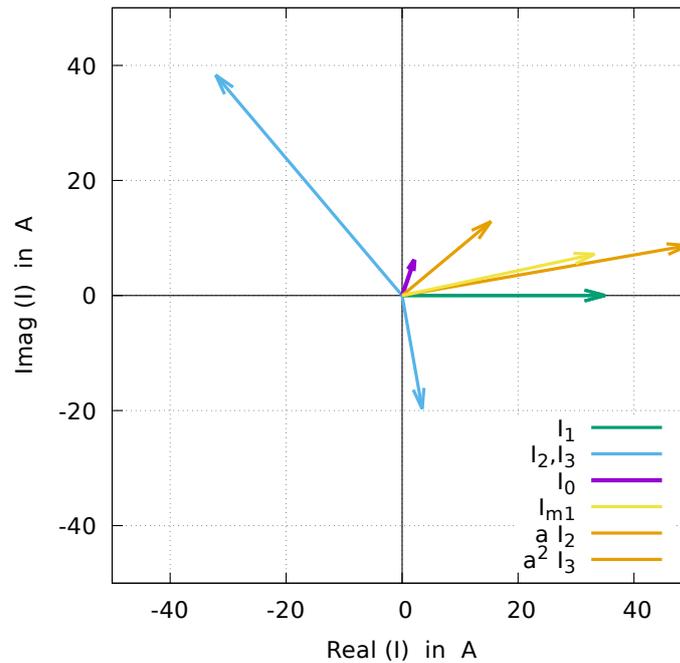


Abb. 97: Null- und Mitsystem

$$\varphi_m = \arctan \frac{\Im(\underline{I}_m)}{\Re(\underline{I}_m)}$$

$$i_m(t) = |\underline{I}_m| \cos(\omega t + \varphi_m)$$

$$\varphi_g = \arctan \frac{\Im(\underline{I}_g)}{\Re(\underline{I}_g)}$$

$$i_g(t) = |\underline{I}_g| \cos(\omega t + \varphi_g)$$

und zeichnet $i_1(t) = i_0(t) + i_m(t) + i_g(t)$.

GNU PLOT Lösung

zeitlicher Verlauf der Ströme:

```
I1=complex(35,0)
I2=complex(20,-80)
I3=complex(50,-230)

i1(t)=abs(I1)*cos(w*t+phi(I1)/p180)
i2(t)=abs(I2)*cos(w*t+phi(I2)/p180)
i3(t)=abs(I3)*cos(w*t+phi(I3)/p180)

plot i1(t),i2(t),i3(t)
```

Symmetrische Komponenten:

8 Übungsaufgaben

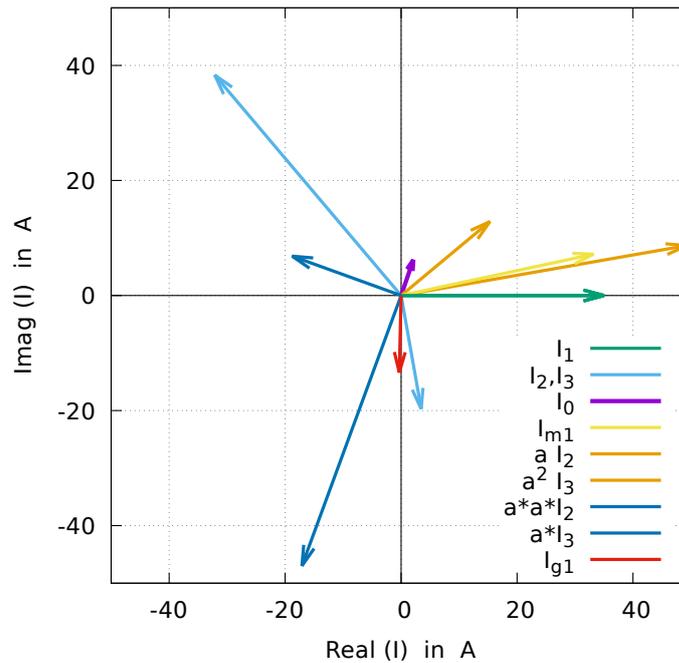


Abb. 98: Null-, Mit- und Gegensystem

$$I_0 = (I_1 + I_2 + I_3) / 3.$$

$$I_m = (I_1 + a \cdot I_2 + a^2 \cdot I_3) / 3.$$

$$I_g = (I_1 + a^2 \cdot I_2 + a \cdot I_3) / 3.$$

zeitlicher Verlauf des Stromes $i_1(t) = i_0(t) + i_m(t) + i_g(t)$:

```
i0(t)=abs(I0)*cos(w*t+phi(I0)/p180)
im(t)=abs(Im)*cos(w*t+phi(Im)/p180)
ig(t)=abs(Ig)*cos(w*t+phi(Ig)/p180)

plot i0(t)+im(t)+ig(t),i0(t),im(t),ig(t)
```

Verifikation:

```
I1s=I0+Im+Ig
I2s=I0+a*a*Im+a*Ig
I3s=I0+a*Im+a*a*Ig
```

```
I1s = 35.0
I2s = {3.47296355333861, -19.6961550602442}
I3s = {-32.139380484327, 38.302221559489}
```

8.18 Drehfeld und Raumzeiger

Die zweipolige, dreisträngige Ständerwicklung eines Drehstrommotors wird an das öffentliche 230 V-Drehstromnetz angeschlossen. Sie ist im Stern geschaltet. Ein Neutralleiter ist nicht vor-

8 Übungsaufgaben

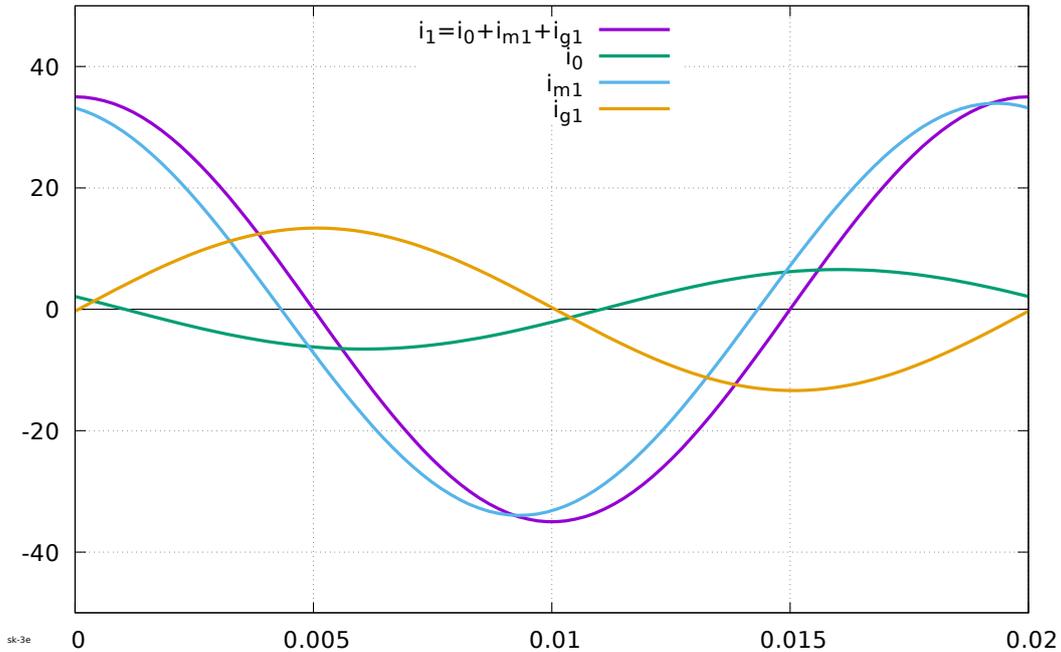


Abb. 99: Verifikation der Ergebnisse

handen.

Der Strom in der U-Spule wird mit einem Oszilloskop gemessen. Die **Amplitude** beträgt 6.5 A, seine Phasenverschiebung gegenüber der Spannung an der Spule ist 75° nacheilend.

1. Geben Sie die Induktivität und den ohmschen Widerstand der Spule an.

$$\underline{U}_1 = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{6.5 \text{ A}}{\sqrt{2}} (\cos(-75^\circ) + j \sin(-75^\circ)) = (1.19 - j 4.44) \text{ A}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = (12.95 + j 48.34) \Omega$$

$$L = \frac{\Im(\underline{Z})}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 0.154 \text{ H}$$

2. Geben Sie die Magnetflüsse der drei Einzelspulen zur Zeit $t = 0$ an.

$$\Psi(t) = L i(t)$$

$$i_1(t) = 6.5 \text{ A} \cos(\omega t - 75^\circ)$$

$$\Psi_u(0) = L i_1(0) = 154 \text{ mH} \cdot 1.68 \text{ A} = 0.259 \text{ Vs}$$

$$\Psi_v(0) = L i \left(0 - \frac{T}{3}\right) = 154 \text{ mH} \cdot (-6.28) \text{ A} = -0.966 \text{ Vs}$$

$$\Psi_w(0) = L i \left(0 - \frac{2T}{3}\right) = 154 \text{ mH} \cdot 4.6 \text{ A} = 0.707 \text{ Vs}$$

3. Geben Sie dazu den Betrag und die räumliche Lage (= Winkel gegen die α -Achse) des resultierenden Magnetflusses der Wicklung an.

Allgemein gilt:

Mit $t = 0$ ergibt sich

$$\Psi_{\alpha}(t) = \Psi_u(t) - \frac{1}{2} \Psi_v(t) - \frac{1}{2} \Psi_w(t)$$

$$\Psi_{\alpha}(0) = 0.389 \text{ Vs}$$

$$\Psi_{\beta}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (\Psi_v(t) - \Psi_w(t))$$

$$\Psi_{\beta}(0) = -1.45 \text{ Vs}$$

$$|\Psi(t)| = \sqrt{\Psi_{\alpha}^2(t) + \Psi_{\beta}^2(t)}$$

$$|\Psi(0)| = 1.5 \text{ Vs}$$

$$\gamma(t) = \arctan\left(\frac{\Psi_{\beta}(t)}{\Psi_{\alpha}(t)}\right)$$

$$\gamma(0) = -75^{\circ}$$

4. Geben Sie den Betrag und die räumliche Lage des resultierenden Magnetflusses der Wicklung zu den Zeiten $t_1 = 2.5 \text{ ms}$ und $t_2 = 5 \text{ ms}$ an.

$$\Psi_{\alpha}(2.5 \text{ ms}) = 1.3 \text{ Vs}$$

$$\Psi_{\alpha}(5 \text{ ms}) = 1.45 \text{ Vs}$$

$$\Psi_{\beta}(2.5 \text{ ms}) = -0.75 \text{ Vs}$$

$$\Psi_{\beta}(5 \text{ ms}) = 0.39 \text{ Vs}$$

$$|\Psi(2.5 \text{ ms})| = 1.5 \text{ Vs}$$

$$|\Psi(5 \text{ ms})| = 1.5 \text{ Vs}$$

$$\gamma(2.5 \text{ ms}) = -30^{\circ}$$

$$\gamma(5 \text{ ms}) = +15^{\circ}$$

5. Nun werden an der Wicklung zwei Anschlüsse vertauscht. Die V-Spule liegt jetzt an L3, die W-Spule an L2. Geben Sie für diesen Fall den Betrag und die räumliche Lage des resultierenden Magnetflusses der Wicklung zu den Zeiten 0, 2.5 ms und 5 ms an.

Aus der Beziehung

$$\Psi_v(t) = L i \left(t - \frac{2T}{3} \right)$$

$$\Psi_w(t) = L i \left(t - \frac{T}{3} \right)$$

t in ms	Ψ_{α} in Vs	Ψ_{β} in Vs	$ \Psi $ in Vs	γ in $^{\circ}$
0.0	0.388	1.45	1.5	75
2.5	1.299	0.75	1.5	30
5.0	1.449	-0.388	1.5	-15

ergeben sich folgende Werte:

Lage der Raumzeiger siehe Abb. 100.

☞ Durch Vertauschen (Umpolen) zweier Wicklungsanschlüsse ändert sich die Drehrichtung (Umkehr der Drehrichtung).

GNU PLOT Lösung

```
f=50.;          w=2*pi*f;          T=1./f
I1dach=6.5;    Fi1=-75.;          U1=230
u1(t)= abs(U1)*sqrt(2)*cos(w*t)
I1=complex(I1dach/sqrt(2),Fi1)
i1(t) = I1dach * cos(w*t+Fi1/p180)
```

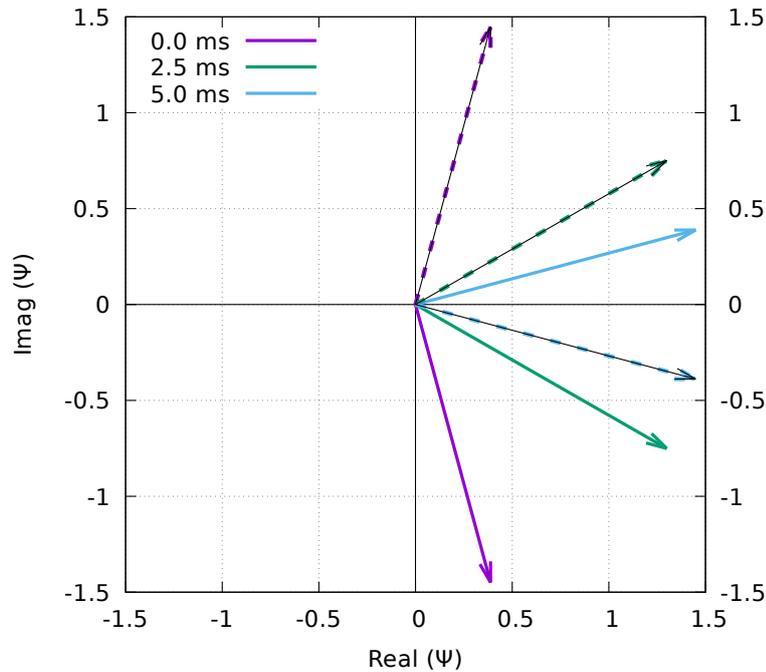


Abb. 100: Lage der Raumzeiger zu verschiedenen Zeitpunkten (die strichlierten Pfeile beziehen sich auf die vertauschten Phasen)

$$Z = U_1 / I_1$$

$$L = \text{imag}(Z) / \omega$$

Berechnung der Magnetflüsse der einzelnen Phasen:

$$\Psi_{iu}(t) = L \cdot i_1(t)$$

$$\Psi_{iv}(t) = L \cdot i_1(t - T/3)$$

$$\Psi_{iw}(t) = L \cdot i_1(t - 2 \cdot T/3)$$

Umwandlung in das $\alpha - \beta$ -System:

$$\Psi_{ia}(t) = \Psi_{iu}(t) - 0.5 \cdot \Psi_{iv}(t) - 0.5 \cdot \Psi_{iw}(t)$$

$$\Psi_{ib}(t) = \sqrt{3} / 2 \cdot (\Psi_{iv}(t) - \Psi_{iw}(t))$$

$$\Psi_i(t) = \sqrt{\Psi_{ia}(t)^2 + \Psi_{ib}(t)^2}$$

$$\gamma(t) = \text{atan2}(\Psi_{ib}(t), \Psi_{ia}(t))$$

Vertauschung von V und W:

$$\Psi_{iw}(t) = L \cdot i_1(t - T/3)$$

$$\Psi_{iv}(t) = L \cdot i_1(t - 2 \cdot T/3)$$

8.19 Magnetisch gekoppelte Spulen, eisenlos

An zwei magnetisch gekoppelten Spulen ohne Eisenkern sollen durch Messungen die Wicklungswiderstände, Induktivitäten sowie die Streu- und Kopplungsfaktoren bestimmt werden (Abb. 101).

8 Übungsaufgaben

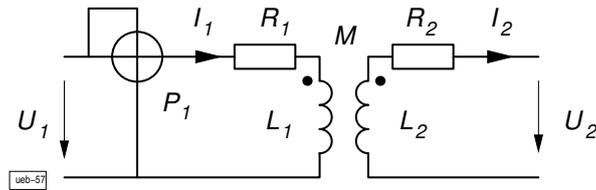


Abb. 101: Magnetisch gekoppelte Spulen, eisenlos

1. Sekundärer Leerlauf:

Messungen: $U_{10} = 230 \text{ V}$ 50 Hz $P_{10} = 50 \text{ W}$ $I_{10} = 3 \text{ A}$

$$R_1 = \frac{P_{10}}{I_{10}^2} = \frac{50 \text{ W}}{(3 \text{ A})^2} = 5.55 \dots \Omega$$

$$Z_1 = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_{10}}{I_{10}}\right)^2 - R_1^2} = 0.243 \text{ H}$$

2. primärer Leerlauf:

Messungen: $U_{20} = 230 \text{ V}$ 50 Hz $I_{20} = 5 \text{ A}$ $P_{20} = 100 \text{ W}$

$$R_2 = \frac{P_{20}}{I_{20}^2} = \frac{100 \text{ W}}{(5 \text{ A})^2} = 4 \Omega$$

$$L_2 = \frac{1 \text{ s}}{2\pi \cdot 50} \sqrt{\left(\frac{230 \text{ V}}{5 \text{ A}}\right)^2 - (4 \Omega)^2} = 0.146 \text{ H}$$

3. Gegen-Reihenschaltung (Abb. 102):

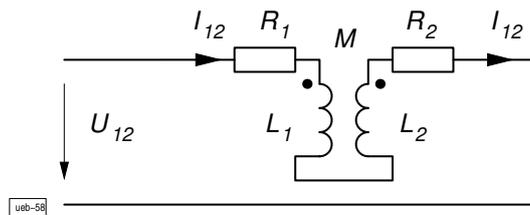


Abb. 102: Gegen-Reihenschaltung

Messungen: $U_{12} = 230 \text{ V}$ $I_{12} = 4.5 \text{ A}$

Entsprechend den Gleichungen (21) und (22) auf Seite 53 gilt

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{I}_{12} (R_1 + R_2) + (\underline{U}_{11} - \underline{U}_{21}) + (\underline{U}_{22} - \underline{U}_{12}) \\ &= \underline{I}_{12} [R_1 + R_2 + j\omega \underbrace{(L_1 + L_2 - M - M)}_{L_{\text{ges}}}] \end{aligned}$$

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 - 2 M = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_{12}}{I_{12}}\right)^2 - (R_1 + R_2)^2} = 0.16 \text{ H}$$

$$M = \frac{L_1 + L_2 - L_{\text{ges}}}{2} = 0.1145 \text{ H}$$

$$k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} = 0.61$$

$$\sigma = 1 - k^2 = 0.628$$

Weitere Messmethoden zur Bestimmung von Gegeninduktivitäten

- Aus Gleichung (22) ergibt sich bei sekundärem Leerlauf

$$\underline{U}_2 = -R_2 \underline{I}_2 - j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

und mit $\underline{I}_2 = 0$ schließlich

$$M = -j \frac{U_2}{\omega I_1} .$$

- Schaltet man beide Wicklungen *gleichsinnig* in Reihe (Abb. 103), d. h. die Flüsse addieren sich, dann gilt:

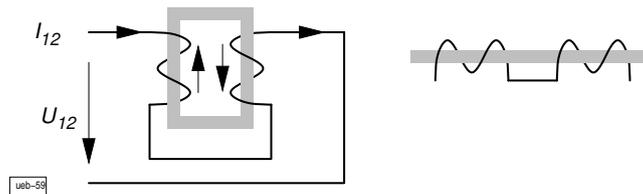


Abb. 103: Gleichsinnige Reihenschaltung

$$\frac{U_{12}}{I_{12}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2 M) = \underline{Z}_A$$

Im Prinzip hat man durch diese Schaltung die Windungszahl der Wicklung und damit die Induktivität erhöht, und zwar quadratisch mit der Windungszahl.

Schaltet man die beiden Wicklungen *gegensinnig* (Abb. 104), so dass sich die Flüsse aufheben, ergibt sich:

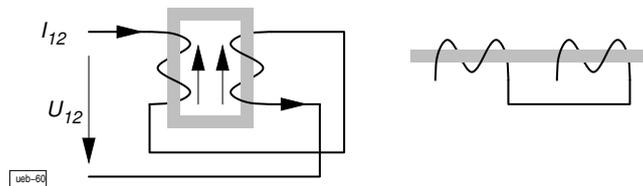


Abb. 104: Gegensinnige Reihenschaltung

$$\frac{U_{12}}{I_{12}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = \underline{Z}_B$$

Dies entspricht einer *bifilaren* Wicklung.

Bildet man die Differenz der beiden gemessenen Impedanzen, erhält man letztendlich:

$$\underline{Z}_A - \underline{Z}_B = j\omega 4M \quad \Rightarrow \quad M = -j \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_B}{4\omega}$$

8.20 Einphasentransformator

Gegeben: $U_1 = 230 \text{ V}$ 50 Hz $S_N = 2.5 \text{ kVA}$ $N_1/N_2 = 5$

1. Wie groß ist die Sekundärspannung, wenn der Trafo als ideal angenommen wird?

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = 46 \text{ V}$$

2. Wie groß ist der primäre Nennstrom?

$$S_N = U_1 I_{1N} \quad \Rightarrow \quad I_{1N} = \frac{S_N}{U_1} = 10.87 \text{ A}$$

3. Durch Messungen wurden die primären und sekundären Streufaktoren σ_1 und σ_2 bereits zu je 3% ermittelt. Die Kupferverluste bei Nennstrom betragen 100 W. Sie entfallen je zur Hälfte auf die Primär- und die Sekundärseite.

Nun wird ein Leerlaufversuch gemacht. Dabei ist die Sekundärseite offen. Die Primärseite liegt an der Netzspannung. Der Effektivwert des Primärstromes wird abgelesen als 3 A. Die gemessene Leistungsaufnahme ist 80 W.

Wie groß ist der primäre Wicklungswiderstand?

$$P_{\text{Cu1}} = 0.5 P_{\text{Cu}} = R_1 I_{1N}^2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{P_{\text{Cu1}}}{I_{1N}^2} = 423.2 \text{ m}\Omega$$

4. Wie groß sind die Kupfer- und Eisenverluste im Leerlauf?

$$P_{10} = P_{\text{Fe}} + P_{\text{Cu1}}$$

$$P_{\text{Cu1}} = R_1 I_{10}^2 = 423.2 \text{ m}\Omega (3 \text{ A})^2 = 3.81 \text{ W}$$

$$P_{\text{Fe}} = 80 \text{ W} - 3.81 \text{ W} = 76.2 \text{ W}$$

Im Leerlauf sind die Kupferverluste vernachlässigbar.

5. Welche Phasenlage gegenüber der Netzspannung hat der primäre Leerlaufstrom?

$$P_{10} = U_1 I_{10} \cos \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi_0 = \frac{P_{10}}{U_1 I_{10}} = 0.116 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = -83.3^\circ$$

6. Wie groß sind näherungsweise die Primärinduktivität L_1 und der Eisenverlustwiderstand R_{Fe} im T-Ersatzschaltbild?

Hinweis: Nehmen Sie für Ihre Berechnung vereinfachend an, dass R_{Fe} parallel zu L_1 liegt (also nicht nur parallel zu L_h). Vernachlässigen Sie außerdem den Spannungsfall am Wicklungswiderstand.

Nach Abb. 50 auf Seite 52 gilt:

$$L_1 = L_{1\sigma} + L_h$$

$$I_{10} = \sqrt{I_\mu^2 + I_{\text{Fe}}^2}$$

$$R_{\text{Fe}} = \frac{U_1^2}{P_{\text{Fe}}} = 694.2 \Omega \quad (\text{wenn man } R_1 \text{ vernachlässigt})$$

$$I_{\text{Fe}} = \frac{U_1}{R_{\text{Fe}}} = 331.3 \text{ mA}$$

$$I_\mu = \sqrt{(3 \text{ A})^2 - (331.3 \text{ mA})^2} = 2.98 \text{ A}$$

$$L_1 = \frac{U_1}{\omega I_\mu} = \frac{230 \text{ V s}}{100 \pi 2.98 \text{ A}} = 245.6 \text{ mH}$$

7. Wie groß sind die primäre Haupt- und die primäre Streuinduktivität?

$$L_{1\sigma} = \sigma_1 L_1 = 7.37 \text{ mH}$$

$$L_h = L_1 - L_{1\sigma} = 238.3 \text{ mH}$$

8. Wie groß wird der Primärstrom bei sekundärem Kurzschluss? Machen Sie für Ihre Berechnung sinnvolle Vereinfachungen. Wie groß schätzen Sie die Überlebenschancen des Trafos in diesem Fall ein?

Vergleicht man im T-Ersatzschaltbild die Werte der Längswiderstände

$$R_1 = R'_2 = 423.2 \text{ m}\Omega, \quad L_{1\sigma} = L'_{2\sigma} = 7.37 \text{ mH}$$

mit den Werten der Querwiderstände

$$R_{\text{Fe}} = 694.2 \Omega, \quad L_h = 238.3 \text{ mH}$$

kann man für eine überschlägige Kurzschlussberechnung die Querwiderstände vernachlässigen, d. h. die Netzspannung wirkt nur auf die Reihenschaltung der Längswiderstände.

$$I_{1k} \approx \frac{U_1}{\sqrt{(2R_1)^2 + (2\omega L_{1\sigma})^2}} = 48.9 \text{ A} \approx 5 I_{1N}$$

8.21 Einphasentransformator im Prüffeld

Auf dem Typenschild stehen: 167 kVA ; 5.77/0.23 kV ; 50 Hz

Es sollen die Parameter des T-Ersatzschaltbildes und die charakteristischen Werte des Transformators durch Messungen und Rechnungen ermittelt werden.

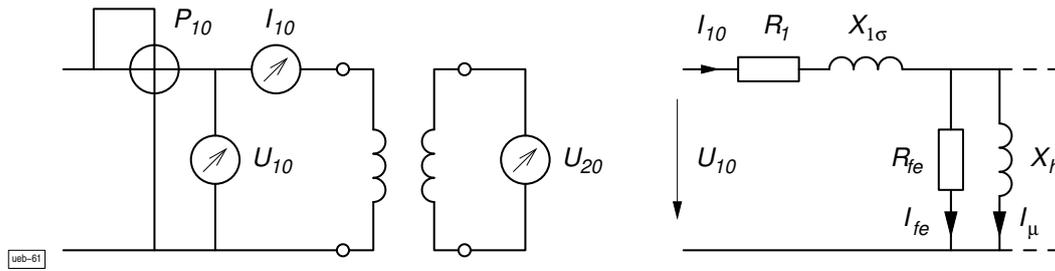


Abb. 105: Leerlaufversuch

Leerlaufversuch (Abb. 105)

Gemessen werden von der OS-Seite: 5770 V ; 1.14 A ; 669 W

Auswertung:

$$\dot{u} = \frac{U_{10}}{U_{20}} = \frac{5770 \text{ V}}{230 \text{ V}} = 25.087 \dots$$

$$S_0 = U_{10} \cdot I_{10} = 5770 \text{ V} \cdot 1.14 \text{ A} = 6.5778 \text{ kVA}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{S_0} = \frac{669 \text{ W}}{6577.8 \text{ VA}} = 0.101 \dots$$

$$\sin \varphi_0 = 0.994 \dots$$

$$I_{\text{Fe}} = I_{10} \cdot \cos \varphi_0 = 1.14 \text{ A} \cdot 0.101 \dots = 0.1159 \dots \text{ A}$$

$$I_{\mu} = I_{10} \cdot \sin \varphi_0 = 1.14 \text{ A} \cdot 0.994 \dots = 1.134 \dots \text{ A}$$

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{167 \text{ kVA}}{5.77 \text{ kV}} = 28.942 \dots \text{ A}$$

$$i_0 = \frac{I_{10} \text{ (bei } U_{1N})}{I_{1N}} = \frac{1.14 \text{ A}}{28.942 \dots \text{ A}} = 0.0393 \dots = 3.93 \dots \%$$

$$R_{\text{Fe}} = \frac{U_{10}}{I_{\text{Fe}}} = \frac{5770 \text{ V}}{0.1159 \dots \text{ A}} = 49.765 \dots \text{ k}\Omega$$

$$X_h = \frac{U_{10}}{I_{\mu}} = \frac{5770 \text{ V}}{1.134 \dots \text{ A}} = 5087.7 \dots \Omega$$

$$P_{\text{FeN}} = P_0 \left(\frac{U_{1N}}{U_{10}} \right)^2 = 669 \text{ W} \quad (\text{Wicklungsverluste vernachlässigt})$$

Hinweis: Die *Eisennennverluste* P_{FeN} sind lastunabhängig und begleiten den Transformator während seiner gesamten Betriebszeit (unter der Voraussetzung, dass der Transformator mit Nennspannung betrieben wird).

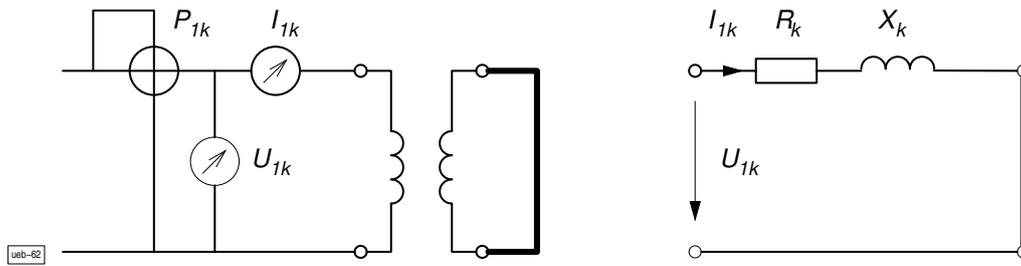


Abb. 106: Leerlaufversuch

Kurzschlussversuch (Abb. 106)

Gemessen: 231 V ; 28.94 A ; 4 kW

Auswertungen:

$$S_k = U_{1k} \cdot I_{1k} = 231 \text{ V} \cdot 28.94 \text{ A} = 6685.14 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{S_k} = \frac{4000 \text{ W}}{6685.14 \text{ VA}} = 0.598 \dots$$

$$\sin \varphi_k = 0.801 \dots$$

$$u_k = \frac{U_{1k} \text{ (bei } I_{1N})}{U_{1N}} = \frac{231 \text{ V}}{5770 \text{ V}} = 0.04 = 4 \%$$

$$Z_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{231 \text{ V}}{28.94 \text{ A}} = 7.982 \dots \Omega$$

$$I_D = \frac{U_{1N}}{Z_k} = \frac{5770 \text{ V}}{7.982} = 722.87 \dots \text{ A}$$

$$R = Z_k \cdot \cos \varphi_k = 7.982 \cdot 0.598 = 4.776 \Omega$$

$$R_1 = R_2' = 0.5 R = 2.388 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_2'}{\ddot{u}^2} = \frac{2.388}{25.087^2} = 3.794 \dots \text{ m}\Omega$$

$$X = Z_k \cdot \sin \varphi_k = 7.982 \Omega \cdot 0.801 \dots = 6.3955 \Omega$$

$$X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = 0.5 X = 3.1977 \Omega$$

$$X_{2\sigma} = \frac{X_{2\sigma}'}{\ddot{u}^2} = \frac{3.1977 \Omega}{25.087^2} = 5.081 \dots \text{ m}\Omega$$

$$P_{\text{CuN}} = P_k \left(\frac{I_{1N}}{I_{1k}} \right)^2 = 4 \text{ kW}$$

Hinweis: Beim Kurzschlussversuch ist der Hauptfluss sehr gering (u_k). Der Transformator verhält sich fast ideal. Bei den Auswertungen kann man den Einfluss der Querimpedanzen ignorieren.

Die Kupferverluste sind lastabhängig. Es gilt:

$$P_{\text{Cu}}(x) = P_{\text{CuN}} x^2 \quad \text{mit} \quad x = \frac{I}{I_N}$$

8.22 Dreiphasentransformator im Prüffeld

Angaben auf dem Typenschild: 1.73 MVA ; 5.77/1 kV ; Dy 11 ; 50 Hz

Leerlaufversuch: 5.77 kV ; 5 A ; 5000 W

Kurzschlussversuch: 346 V ; 173 A ; 31 kW.

Berechnen Sie die Elemente des *einphasigen* Ersatzschaltbildes.

Unter Berücksichtigung der Schaltgruppe ergeben sich:

$$\ddot{u} = \frac{U_{10} \sqrt{3}}{U_{20}} = 9.993 \dots$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0 \sqrt{3}}{3 U_{10} I_{10}} = 0.1 \dots$$

$$\sin \varphi_0 = 0.995 \dots$$

$$I_{\text{fe}} = \frac{I_{10}}{\sqrt{3}} \cos \varphi_0 = 0.288 \dots \text{ A}$$

$$I_{\mu} = \frac{I_{10}}{\sqrt{3}} \sin \varphi_0 = 2.872 \dots \text{ A}$$

$$R_{\text{fe}} = \frac{U_{10}}{I_{\text{fe}}} = 19.975 \dots \text{ k}\Omega$$

$$X_h = \frac{U_{10}}{I_{\mu}} = 2.008 \dots \text{ k}\Omega$$

$$\cos \varphi_k = \frac{P_{1k}}{\sqrt{3} U_{1k} I_{1k}} = 0.299 \dots$$

$$\sin \varphi_k = 0.954 \dots$$

$$u_k = \frac{U_{1k}}{U_{1N}} = 0.0599 \dots$$

$$Z_k = \frac{U_{1k} \sqrt{3}}{I_{1k}} = 3.464 \dots \Omega$$

$$R_1 = \frac{Z_k \cos \varphi_k}{2} = 0.517 \dots \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_1}{\ddot{u}^2} = 5.18 \dots \text{ m}\Omega$$

$$X_{\sigma 1} = \frac{Z_k \sin \varphi_k}{2} = 1.652 \dots \Omega$$

$$X_{\sigma 2} = \frac{X_{\sigma 1}}{\ddot{u}^2} = 16.54 \dots \text{ m}\Omega$$

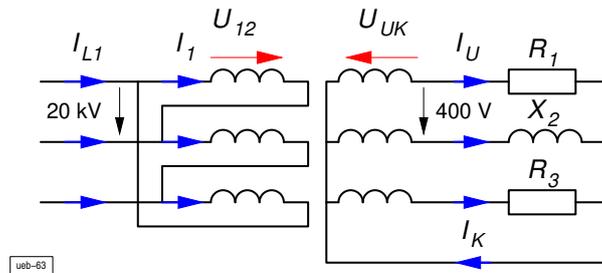


Abb. 107: Unsymmetrisch belasteter Drehstromtransformator

8.23 Unsymmetrisch belasteter Drehstromtransformator

Betrachtet wird ein Drehstromtransformator (20 kV/400 V, Dy) mit unsymmetrischer Belastung (Abb. 107). Der Trafo soll als ideal angenommen werden.

Belastung: $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = j1 \Omega$; $R_3 = 2 \Omega$.

1. Geben Sie die komplexen Effektivwerte der Sekundärströme $\underline{I}_u, \underline{I}_v, \underline{I}_w$ an.

Die Phasenspannung $U_{uk} = 400 \text{ V} / \sqrt{3} = 230 \text{ V}$ wird als Bezugsphase für die gesamte Aufgabe gesetzt.

$$\underline{U}_{uk} = 230 \text{ V} \angle 0^\circ$$

$$\underline{U}_{vk} = \underline{U}_{uk} \mathbf{a}^2 = 230 \text{ V} \angle -120^\circ$$

$$\underline{U}_{wk} = \underline{U}_{uk} \mathbf{a} = 230 \text{ V} \angle +120^\circ$$

$$\underline{I}_u = \frac{\underline{U}_{uk}}{R_1} = 230 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$\underline{I}_v = \frac{\underline{U}_{vk}}{jX_2} = 230 \text{ A} \angle +150^\circ$$

$$\underline{I}_w = \frac{\underline{U}_{wk}}{R_3} = 115 \text{ A} \angle +120^\circ$$

2. Geben Sie den komplexen Effektivwert des Neutralleiterstromes \underline{I}_k an.

$$\underline{I}_k = \underline{I}_u + \underline{I}_v + \underline{I}_w = 216.2 \text{ A} \angle +97.1^\circ$$

3. Wie groß sind die komplexen Effektivwerte der primären Wicklungsströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$?

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{230 \text{ V}}{20000 \text{ V}} = 11.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_u = 2.656 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_v = 2.656 \text{ A} \angle +150^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_w = 1.328 \text{ A} \angle +120^\circ$$

8 Übungsaufgaben

4. Wie groß sind die komplexen Effektivwerte der Netzströme $\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3}$?

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 3.51 \text{ A } \angle -19.1^\circ$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = 5.13 \text{ A } \angle +165^\circ$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 1.65 \text{ A } \angle -6.2^\circ$$

5. Geben Sie das Mit-, Gegen- und Nullsystem der Sekundärströme $\underline{I}_u, \underline{I}_v, \underline{I}_w$ an (nur Phase U).

$$\underline{I}_{u0} = \frac{\underline{I}_k}{3} = 72.08 \text{ A } \angle +97.1^\circ$$

$$\underline{I}_{um} = \frac{\underline{I}_u + \underline{a} \underline{I}_v + \underline{a}^2 \underline{I}_w}{3} = 138.2 \text{ A } \angle -33.7^\circ$$

$$\underline{I}_{ug} = \frac{\underline{I}_u + \underline{a}^2 \underline{I}_v + \underline{a} \underline{I}_w}{3} = 124.0 \text{ A } \angle +2.37^\circ$$

6. Geben Sie das Mit-, Gegen- und Nullsystem der Primärströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ an (nur Phase 1).

$$\underline{I}_{10} = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_{u0} = 832 \text{ mA } \angle +97.1^\circ$$

$$\underline{I}_{1m} = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_{um} = 1.596 \text{ A } \angle -33.7^\circ$$

$$\underline{I}_{1g} = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_{ug} = 1.43 \text{ A } \angle +2.37^\circ$$

7. Geben Sie das Mit-, Gegen- und Nullsystem der Netzströme $\underline{I}_{L1}, \underline{I}_{L2}, \underline{I}_{L3}$ an (nur Phase L1).

$$\underline{I}_{L10} = \frac{\underline{I}_1 - \underline{I}_3 + \underline{I}_2 - \underline{I}_1 + \underline{I}_3 - \underline{I}_2}{3} = 0$$

$$\underline{I}_{L1m} = \frac{\underline{I}_{L1} + \underline{a} \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \underline{I}_{L3}}{3} = 2.76 \text{ A } \angle -63.7^\circ$$

$$\underline{I}_{L1g} = \frac{\underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \underline{I}_{L2} + \underline{a} \underline{I}_{L3}}{3} = 2.48 \text{ A } \angle +32.4^\circ$$

Fazit: $\underline{I}_{L10} = 0$; $\underline{I}_{L1m} = \sqrt{3} \underline{I}_{1m} \angle -30^\circ$; $\underline{I}_{L1g} = \sqrt{3} \underline{I}_{1g} \angle +30^\circ$

GNU PLOT Lösung

Vorgaben:

```

w=2*pi*50
U1=20E3 # verkettete Spannung (D)
U2=400 # (y)
UUK=230
UVK=UUK*a*a
UWK=UUK*a

ZR1=1
ZX2=j*1
ZR3=2

```

Sekundärströme:

```

IU=UUK/ZR1;    IU_versor=versor(IU)
IV=UVK/ZX2;    IV_versor=versor(IV)
IW=UWK/ZR3;    IW_versor=versor(IW)

```

Neutralleiterstrom:

```

IK=IU+IV+IW;    IK_versor=versor(IK)

```

primäre Wicklungsströme:

```

N2zuN1=U2/sqrt(3)/U1
I1=N2zuN1*IU;    I1_versor=versor(I1)
I2=N2zuN1*IV;    I2_versor=versor(I2)
I3=N2zuN1*IW;    I3_versor=versor(I3)

```

Netzströme:

```

IL1=I1-I3;    IL1_versor=versor(IL1)
IL2=I2-I1;    IL2_versor=versor(IL2)
IL3=I3-I2;    IL3_versor=versor(IL3)

```

Symmetrische Komponenten der Sekundärströme:

```

IU_0 = IK/3;    IU_0_versor=versor(IU_0)
IU_m = (IU+a*IV+a*a*IW)/3; IU_m_versor=versor(IU_m)
IU_g = (IU+a*a*IV+a*IW)/3; IU_g_versor=versor(IU_g)

```

Symmetrische Komponenten der Primärströme:

```

I1_0 = N2zuN1*IU_0;    I1_0_versor=versor(I1_0)
I1_m = N2zuN1*IU_m;    I1_m_versor=versor(I1_m)
I1_g = N2zuN1*IU_g;    I1_g_versor=versor(I1_g)

```

Symmetrische Komponenten der Netzströme:

8 Übungsaufgaben

```
IL1_0 = (IL1+IL2+IL3)/3;  
IL1_m = (IL1+a*IL2+a*a*IL3)/3;    IL1_m_versor=versor(IL1_m)  
IL1_g = (IL1+a*a*IL2+a*IL3)/3;    IL1_g_versor=versor(IL1_g)
```

9 Weitere Beispiele

9.1 Drehfeldrichtungsanzeiger

Beim Anschluss von Motoren, Zählern, Leistungsmessern und anderen Drehstromverbrauchern, die phasenrichtig angeschlossen werden müssen, muss die Drehfeldrichtung (Phasenfolge) bekannt sein. Zur Feststellung der Drehfeldrichtung dient ein Messgerät [10, S. 415], welches ohne Mechanik rein elektrisch die Phasenfolge anzeigt¹⁷. Abb. 108 zeigt die Schaltung des Gerätes. Das zu überprüfende Drehstromnetz wird mit den Leiter L1-L2-L3 (= U-V-W) an die Klemmen

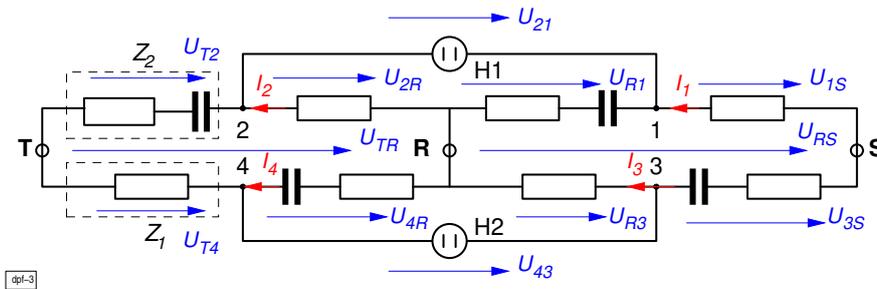


Abb. 108: Schaltung des Drehfeldrichtungsanzeigers

R-S-T¹⁸ angeschlossen. Je nach Drehrichtung leuchtet eine der beiden Meldelampen (Glimmlampen) H1 oder H2.

Zum besseren Verständnis der Herleitung werden zusätzlich die vier Knotenpunkte 1-2-3-4 benutzt und für die Indizes der Spannungspfeile verwendet.

Die Meldelampen liegen an den Spannungen U_{21} bzw. U_{43} . Es handelt sich um hochohmige Glimmlampen, die erst ab einer gewissen Zündspannung aufleuchten und keine wesentliche Rückwirkung auf die Schaltung haben. Die Schaltung besteht nur aus 4 gleichen Impedanzen Z_1, Z_2 . Die Impedanz Z_1 besteht aus einem Widerstand $\underline{Z}_1 = R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, die Impedanz Z_2 aus der Reihenschaltung eines Widerstandes mit einer Kapazität $\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C$ mit $R_2 = 60 \text{ k}\Omega$ und $C = 32 \text{ nF}$.

Mit den eingezeichneten Strom und Spannungspfeilen ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Spannungen U_{21} und U_{43} :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_{RS} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) & \underline{I}_3 &= \underline{U}_{RS} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ \underline{I}_2 &= \underline{U}_{TR} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) & \underline{I}_4 &= \underline{U}_{TR} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{aligned}$$

mit den verketteten Spannungen $\underline{U}_{RS} = \underline{U}_S - \underline{U}_R$ bzw. $\underline{U}_{TR} = \underline{U}_R - \underline{U}_T$. Daraus ergeben sich die 8 Teilspannungen

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_2 & \underline{U}_{1S} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 & \underline{U}_{R3} &= \underline{I}_3 \underline{Z}_1 & \underline{U}_{3S} &= \underline{I}_3 \underline{Z}_2 \\ \underline{U}_{T2} &= \underline{I}_2 \underline{Z}_2 & \underline{U}_{2R} &= \underline{I}_2 \underline{Z}_1 & \underline{U}_{T4} &= \underline{I}_4 \underline{Z}_1 & \underline{U}_{4R} &= \underline{I}_4 \underline{Z}_2 \end{aligned}$$

und damit

$$\underline{U}_{21} = \underline{U}_{2R} + \underline{U}_{R1} \qquad \underline{U}_{43} = \underline{U}_{4R} + \underline{U}_{R3} \cdot$$

¹⁷Man könnte auch einen tragbaren Drehstrommotor benutzen.

¹⁸alte Bezeichnung für die Außenleiter eines Drehstromnetzes

9 Weitere Beispiele

Mit den angegebenen Zahlenwerten und einer Strangspannung von 230 V ergeben sich

$$\begin{array}{lll} \text{Phasenfolge RST :} & \underline{U}_{21} \approx 34 \angle -170^\circ \text{ V} & \underline{U}_{43} \approx 394 \angle -85^\circ \text{ V} \\ \text{Phasenfolge RTS :} & \underline{U}_{21} \approx 394 \angle 94^\circ \text{ V} & \underline{U}_{43} \approx 34 \angle 9.7^\circ \text{ V} . \end{array}$$

Glimmlampen zünden im allg. erst ab Spannungen $> 80 \text{ V}$ und mehr, d. h. es leuchtet nur eine Glimmlampe.

Mehr Aufschluss liefern die Zeigerdiagramme für beide Drehrichtungen. Aus Abb. 108 erkennt man, dass die Schaltung aus zwei Brücken besteht, die einen gemeinsamen Potentialpunkt R haben und an den gegenüberliegenden Punkten mit den Phasen S bzw. T verbunden sind. Gesucht sind die Potentialpunkte 1 bis 4. Abb. 109 zeigt die Teilspannungen in den beiden

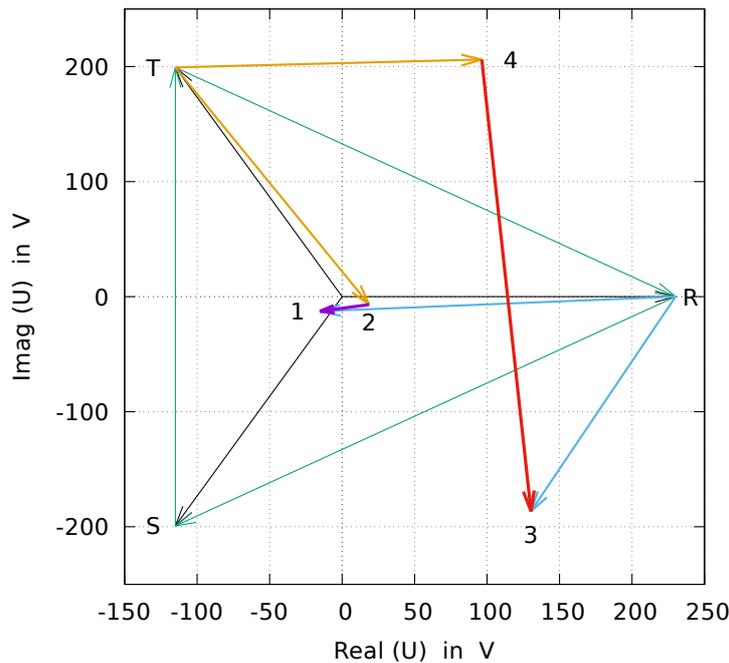


Abb. 109: Teilspannungen bei der Phasenfolge R-S-T

Brücken bei der Phasenfolge R-S-T. Dazu genügt es die Spannungspfeile \underline{U}_{T2} , \underline{U}_{T4} , \underline{U}_{R1} , \underline{U}_{R3} zu zeichnen. Die Verbindungen zwischen den entsprechenden Pfeilenden ergeben die gesuchten Spannungen \underline{U}_{21} und \underline{U}_{43} . Abb. 110 zeigt das Zeigerdiagramm bei umgekehrter Drehrichtung. Im Prinzip sind die beiden Diagramme identisch, nur die Positionen der Potentialpunkte T,S,1,2,3,4 haben sich geändert. Damit erhalten die Meldelampen unterschiedliche Spannungen je nach Drehrichtung.

GNU PLOT Lösung

Vorgabe der Schaltungsdaten:

```
UR=230
# US=a*a*UR;    UT=a*UR          # Drehfeld ---> RST
US=a*UR;        UT=a*a*UR        # Drehfeld ---> RTS

URS=US-UR;      UTR=UR-UT;       UST=UT-US
```

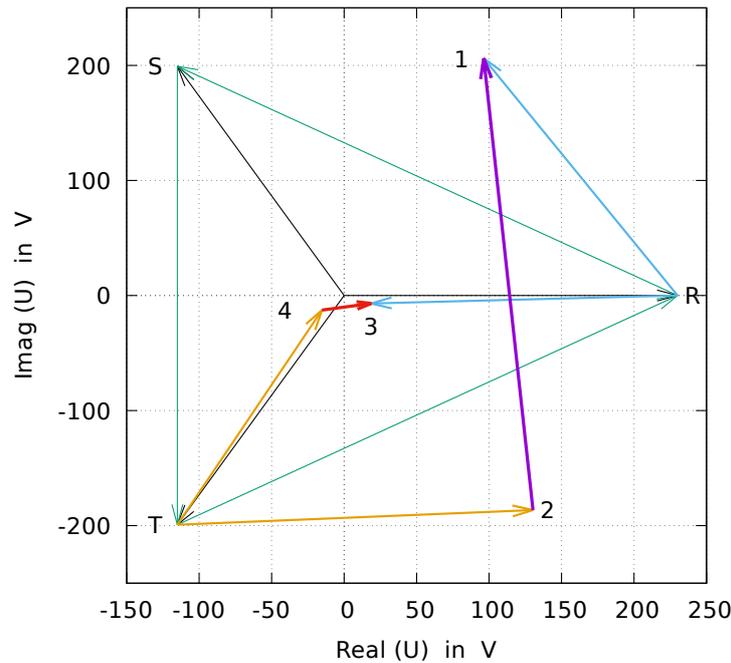


Abb. 110: Teilspannungen bei der Phasenfolge R-T-S

$$Z1=100e3; \quad R2=60e3; \quad C=32e-9; \quad XC=1./(w*C); \quad Z2=R2-j*XC$$

Berechnung der Teilspannungen und Lampenspannung:

$$I1=URS/(Z1+Z2); \quad I3=URS/(Z1+Z2); \quad I2=UTR/(Z1+Z2); \quad I4=UTR/(Z1+Z2)$$

$$UR1=I1*Z2; \quad U1S=I1*Z1; \quad UR3=I3*Z1; \quad U3S=I3*Z2$$

$$UT2=I2*Z2; \quad U2R=I2*Z1; \quad UT4=I4*Z1; \quad U4R=I4*Z2$$

$$u21=versor(U2R+UR1); \quad u43=versor(U4R+UR3)$$

9.2 Dreiphasiges Verlängerungskabel bei unsymmetrischer Belastung

Mehrere einphasige passive Verbraucher sollen aus einem Drehstromnetz mit Hilfe eines 5-adrigen Verlängerungskabels (L1, L2, L3, N, PE) versorgt werden. Dazu werden die entsprechenden Enden des Kabels mit drei einphasige Steckdosen (z. B. Kabeltrommel, Stromverteiler) versehen, d. h. jede Phase speist eine Steckdose. In Phase L1 fließt der maximal zulässige Strom I_{L1N} bei $\cos \varphi_1 = 1$.

Berechnen Sie Phasenlage und Größe der Verbraucherströme I_{L2} und I_{L3} , bei denen der Neutralleiterstrom maximal wird. Wie groß wird I_N ?

Hinweis: die Ströme I_{L2}, I_{L3} dürfen nicht größer als I_{L1N} sein.

Je geringer die Phasendifferenz zwischen den drei Leiterströmen ist je größer ist die Summe der Ströme. Da der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung bei einem passiven Verbraucher (R,L,C) nie größer als 90° werden kann, ergeben sich für die Grenzlagen von I_{L3} ein rein induktiver Strom und für I_{L2} ein rein kapazitiver Strom (Abb. 111).

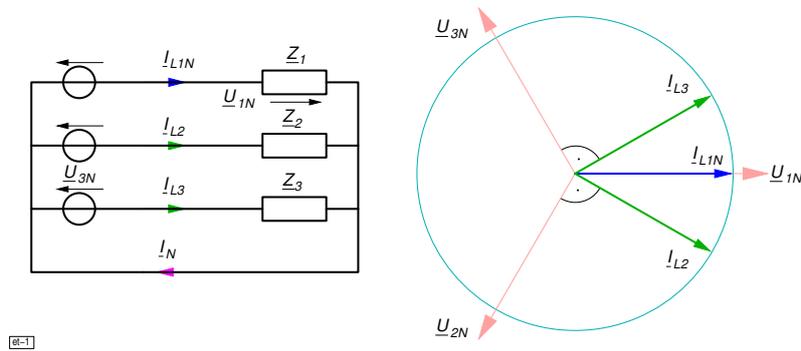


Abb. 111: Maximaler Neutralleiterstrom

Mit den Winkeln ergibt sich für den maximalen Leiterstrom

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1N} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}$$

und für das Verhältnis I_N/I_{L1N}

$$\frac{I_N}{I_{L1N}} = 1.0 + 2 \cos 30^\circ = 2.732$$

d. h. der Neutralleiter würde bei dieser Belastung etwa den 2.7-fachen Nennstrom führen, was zur Zerstörung des Kabels führt. In der Praxis sind solche Belastungen nicht realistisch. Im allg. bewegen sich die Leistungsfaktoren einphasiger Verbraucher im ohmsch-induktiven Bereich.

Literatur

- [1] *Messtechnisches Praktikum*. Institut für Hochspannungs- und Messtechnik. TH Darmstadt, Germany, 1966.
- [2] Eugen Philippow. *Grundlagen der Elektrotechnik*. 6. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1981.
- [3] Klaus Lunze. *Berechnung elektrischer Stromkreise*. 5. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik, 1960.
- [4] Joseph A. Edminister. *Elektromagnetismus*. Schaum's Outline. Hamburg: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [5] Ramzi Dib. Private Mitteilungen.
- [6] August Hochrainer. *Symmetrische Komponenten*. Springer Berlin Heidelberg, 1957.
- [7] Wolf-Rainer Novender. "SCEPTRE — Ein Programm zur Analyse und Simulation nichtlinearer elektrischer Netzwerke und dynamischer Systeme". Anwendungsbeispiele. www.thm.de/iem/images/user/novender-978/SCEPTRE-beispiele.pdf. 2018.
- [8] Wolf-Rainer Novender. "Grundlagen zur Elektrotechnik. Begleitmaterial mit durchgerechneten Beispielen zur Vorlesung ET4 (1992)". <https://www.thm.de/iem/images/user/novender-978/get-19108.pdf>. TH Mittelhessen, Fachbereich IEM, 2019.
- [9] Joseph A. Edminister. *Elektrische Netzwerke. Überblicke, Aufgaben*. Schaum's Outline. London, New York: McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [10] *AEG-Hilfsbuch. Handbuch der Elektrotechnik*. 10. Aufl. Berlin-Grunewald: Bertelsmann Verlag, Gütersloh, 1967.

Index

- 220/230 V, [33](#)
- Anwendungsprogramm, [1](#)
- Applikation, [1](#)
- Aron-Schaltung, [29](#)
- bifilare Wicklung, [120](#)
- Curietemperatur, [50](#)
- Drehrichtung, [116](#)
- Dreileiternetz
 - Einphasen-, [33](#)
 - Gleichstrom-, [33](#)
- Durchflutungssatz, [41](#)
- Eisennennverluste, [122](#)
- Harmonisierung, [33](#)
- Joch, [58](#)
- Kabeltrommel, [131](#)
- Koerzitivfeldstärke, [50](#)
- Kohlebogenlampe, [33](#)
- Kohlefadenlampe, [33](#)
- Kupferverluste, [123](#)
- Mantelbauweise, [59](#)
- Mehrwickler, [62](#)
- Mittelspannungswicklungen, [62](#)
- Netz(werk)liste, [3](#)
- Open-Source Programm, [1](#)
- Parallelkompensation, [13](#)
- Paramagnetismus, [50](#)
- Remanenzflussdichte, [50](#)
- Scheitelwert, [76](#)
- Schenkel, [58](#)
- Serienkompensation, [13](#)
- Software, [1](#)
- Spitzenspannung, [76](#)
- Sternpunkt
 - künstlich, [28](#)
- Sternpunktspannung, [25](#)
- Stromverteiler, [131](#)
- Supraleitung, [45](#)
- Sättigung, [50](#)
- Tempelbauweise, [58](#)
- Tertiärwicklung, [62](#)
- Transformatorbank, [58](#)
- Umpolen, [116](#)
- Verluste
 - lastabhängig, [123](#)
 - lastunabhängig, [122](#)
- Verlängerungskabel, [131](#)
- Versor, [2](#)
- Wattmeter, [30](#)
- Weissche Bezirke, [49](#)
- Zick-Zack-Schaltung, [59](#)
- Übersetzungsverhältnis, [45](#), [59](#)